Problemas

Problem 1. *En una Olimpiada de Matemáticas los concursantes están ocupando todos los asientos de un salón rectangular donde los asientos están alineados en filas y columnas de tal manera que hay más de dos filas y en cada fila hay más de dos asientos. Al inicio del examen un profesor les sugiere que se deseen suerte dándose la mano; cada uno de los concursantes estrecha la mano de los concursantes que están junto a él (adelante, atrás, a los lados y en diagonal) y solo a estos. Alguien observa que se dieron 1020 apretones de manos. ¿Cuántos concursantes hay?*

Problem 2. *Sea ω una circunferencia con centro en O y sean A y B dos puntos en ella tales que AB no es diámetro. La bisectriz de $\angle ABO$ intersecta a ω en C, a la circunferenca circunscrita al $\triangle AOB$ en K y a la circunferencia circunscrital al $\triangle AOC$ en L. Prueba que K es el circuncentro del $\triangle AOC$ y que L es el incentro del $\triangle AOB$.*

Problem 3. *En un tablero de 8×8 hay 32 piezas blancas y 32 piezas negras, una pieza en cada casilla. En un movimiento un jugador puede seleccionar una fila o una columna y cambiar de color todas las piezas ubicadas en ella, las blancas a negras y las negras a blancas ¿Es posible que después de un número finito de movimientos tengamos sobre el tablero exactamente una pieza negra y el resto blancas?*

Problem 4. *Sea ABC un triángulo con $\angle BAC = 60^{\circ}$. Sean D y E los pies de las alturas desde A a las bisectrices exteriores de los ángulos $\angle ABC$ y $\angle ACB$, respectivamente. Sea O el circuncentro del $\triangle ABC$. Prueba que los circuncírculos de los triángulos ADE y BOC son tangentes entre sí.*

Problem 5. *Sea $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ una función que satisface*

$$g(x) + g(y) = g(x + y) - xy$$

Para todos $x, y \in \mathbb{Z}$. Dado que $g(23) = 0$, calcula $g(35)$.

Problem 6. *Varios números(al menos 2), distintos de cero, están escritos en la pizarra. Una operación consiste en borrar cualesquiera dos de estos, a y b, y en su lugar escribir los números $a + \frac{b}{2}$ y $\frac{a}{2} - b$. Prueba que luego de un número finito de operaciones el conjunto resultante no puede coincidir con el inicial.*

Problem 7. *Disponemos de* $2n$ *bombillas colocadas en dos filas (A y B) y numeradas de* 1 *a* n *en cada fila. Algunas (o ninguna) de las bombillas están encendidas y el resto apagadas; decimos que eso es un "estado". Dos estados son distintos si hay, al menos, una bombilla que está encendida en uno de ellos y apagada en el otro. Diremos que un estado es "bueno" si hay la misma cantidad de bombillas encendidas en la fila A que en la B. Demuestra que el número total de estados buenos dividido por el número total de estados es*

$$\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)}{2^n n!}$$

Problem 8. *Sea* $ABCD$ *un cuadrado de lado uno inscrito en una circunferencia. Sea* M *un punto en el menor de los arcos* AB. *Calcula el mínimo valor de*

$$\frac{MC \cdot MD}{MA \cdot MB}.$$

Problem 9. *En el interior de un cuadrado de lado* 15 *se colocan* 20 *cuadrados unitarios que no se intersectan. Prueba que es posible colocar en el interior del cuadrado grande una circunferencia unidad que no intersecta a ninguno de los cuadrados pequeños.*

Soluciones

Solución 1

Supongamos que tenemos m filas y n columnas. Veamos que los sentados en las esquinas saludan 3 veces, los de las filas y columnas exteriores que no están en las esquinas saludan 5 veces y los interiores saludan 8 veces. Teniendo en cuenta que sumando todo contamos dobles los saludos llegamos a que

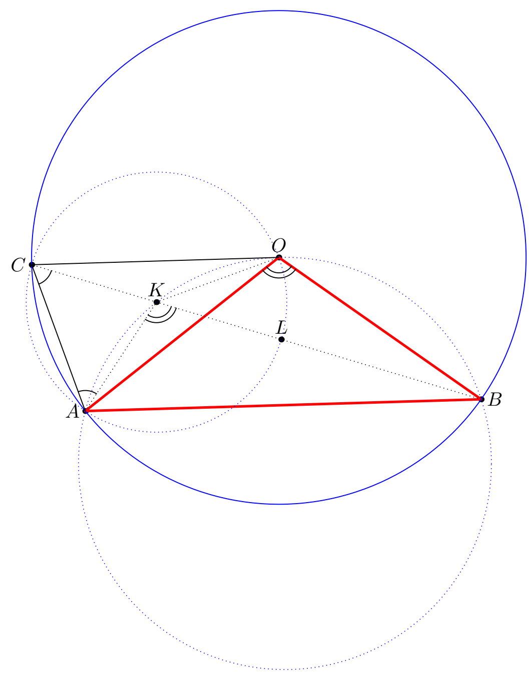
$$4 \cdot 3 + 2(m-2) \cdot 5 + 2(n-2) \cdot 5 + (m-2)(n-2) \cdot 8 = 2 \cdot 1020$$

de donde

$$\begin{aligned} 8mn - 6m - 6n &= 2036 \\ 16mn - 12m - 12n &= 4072 \\ 16mn - 12m - 12n + 9 &= 4081 \\ (4m-3)(4n-3) &= 4081 \end{aligned} \tag{1}$$

las posibilidades para $\{4m-3, 4n-3\}$ son $\{1, 481\}, \{7, 583\}, \{11, 371\}, \{53, 77\}$. Por la congruencia módulo 4 y la condición de que no puede haber solo una fila o solo una columna tenemos que la solución es $\{4m-3, 4n-3\} = \{53, 77\}$, de donde $m = 14$ y $n = 20$ de donde hay $\boxed{280}$ concursantes. $\square$

Solución 2



Veamos que al $\angle AKB = \angle AOB$ estar inscritos sobre la cuerda AB en $(AKOB)$. Además en (ABC) tenemos que $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB$, por ser semi-inscrito e inscrito sobre AB, de donde

$$\angle KAC = \angle AKB - \angle ACB = \angle AOB - \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2}\angle AOB = \angle ACK$$

lo que implica que $\triangle CKA$ es isósceles de base CA y así $CK = CA$. Por otra parte en $(AKOB)$ el punto K es el punto medio del arco AO lo que implica que $AK = KO$. Combinando ambos hechos tenemos que $CK = AK = OK$, de donde K es el circuncentro de $\triangle AOC$.

En $ACOL$ tenemos que $\angle AOL = \angle ACL = \frac{1}{2}\angle AOB$, lo que implica que AL es bisectriz de AOB, unido a que BL es bisectriz de $\angle OBA$ llegamos a que L es el incentro del $\triangle AOB$.

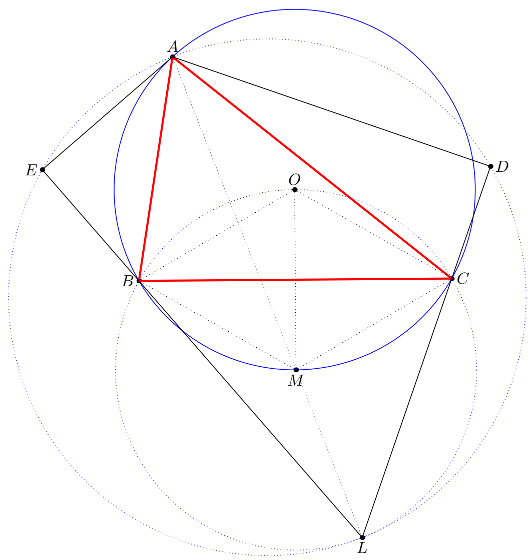
□

Solución 3

La respuesta es $\boxed{NO}$. En efecto, supongamos que tenemos N piezas negras en el tablero, en un movimiento tomamos una columna(o una fila) que tiene k piezas negras, el total de piezas negras ahora es $N-k+(8-k) = N+8-2k$, por tanto la paridad de la cantidad de piezas blancas nunca cambia, de donde es imposible empezar con 32 piezas negras y terminar con 1. $\square$

Solución 4

En la figura, sea L el $A-$excentro del $\triangle ABC$ y sea M el punto medio del menor de los arcos BC.



Claim 1

$BOCL$ es cíclico y M es el centro de su circunferencia circunscrita.

Demostración: En efecto,

$$\begin{aligned}\angle BLC &= 180 - \angle CBL - \angle BCL\\ &= 180 - \tfrac{1}{2}(180 - \angle ABC) - \tfrac{1}{2}(180 - \angle ACB)\\ &= \tfrac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB)\\ &= \tfrac{1}{2}(180 - \angle BAC) = 60.\end{aligned}$$

Esto, unido a que $\angle BOC = 2\angle BAC = 120$ demuestra que $BOCL$ es cíclico. Para concluir la prueba del lema notemos que $\angle BOM = \angle MOC = 60$ y que

$OB = OM = OC$, lo que implica que $\triangle BOM$ y $\triangle COM$ son equiláteros, de donde $BM = MO = MC$ y entonces M es el circuncentro del $(BOCL)$.

Volviendo al problema, como $\angle AEL = \angle ADL = 90$ tenemos que $EADL$ es cíclico y el centro de la circunscrita es el punto medio del diámetro AL. Como centros de $(AEDL)$ y $(BOCL)$ están alineados con L dichas circunferencias son tangentes en L. $\square$

Solución 5

Veamos que haciendo $x = y = 0$ obtenemos que $g(0) = 0$. Haciendo $y = 1$ obtenemos que $g(x + 1) - g(x) = g(1) + x$, de donde

$$\begin{aligned} g(1) - g(0) &= g(1) + 0 \\ g(2) - g(1) &= g(1) + 1 \\ g(3) - g(2) &= g(1) + 2 \\ &\vdots \\ g(23) - g(22) &= g(1) + 22 \end{aligned}$$

sumando(telescópica) tenemos que

$$g(23) = 23g(1) + (1 + 2 + \cdots + 22)$$

despejando obtenemos que $g(1) = -11$.

Por otra parte,

$$\begin{aligned} g(24) - g(23) &= g(1) + 23 \\ g(25) - g(24) &= g(1) + 24 \\ &\vdots \\ g(35) - g(34) &= g(1) + 34 \end{aligned}$$

sumando nuevamente tenemos que

$$g(35) = 12g(1)+(22+23+\cdots+34) = 12g(1)+(1+2+\cdots+34)-(1+2+\cdots+22)$$

despejando obtenemos que $\boxed{g(35) = 210}$.

$\square$

Solución 6

Si los números escritos en la pizarra son $x_1, x_2, \dots x_n$ sea S igual a la suma de los cuadrados de dichos números. Supongamos que escogemos x_1 y x_2, los nuevos números son $x_1 + \frac{x_2}{2}, \frac{x_1}{2} - x_2, x_3 \dots, x_n$ y el nuevo valor de S es

$$\begin{aligned} S' &= (x_1 + \tfrac{x_2}{2})^2 + (\tfrac{x_1}{2} - x_2)^2 + x_3^2 \cdots + x_n^2 \\ &= x_1^2 + x_1x_2 + \tfrac{x_2^2}{4} + \tfrac{x_1^2}{4} - x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2 \cdots + x_n^2 \\ &= S + \tfrac{x_1^2}{4} + \tfrac{x_2^2}{4} \end{aligned}$$

como al inicio no hay ceros S crece estrictamente en el primer paso y luego nunca más decrece por tanto nunca más podremos tener los mismo valores iniciales. $\square$

Solución 7

Veamos que el total de estados es 2^{2n}.
EL número de estados buenos con k bombillas encendidas es $\binom{n}{k}^2$, de donde el total de estados buenos es $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Teniendo en cuenta que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, veamos lo siguiente: Si tenemos un conjunto de n hombres y n mujeres tenemos $\binom{2n}{n}$ formas de escoger n personas, que es lo mismo que la suma en k, de la cantidad de formas de escoger k hombres y $n-k$ mujeres, de esta forma

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

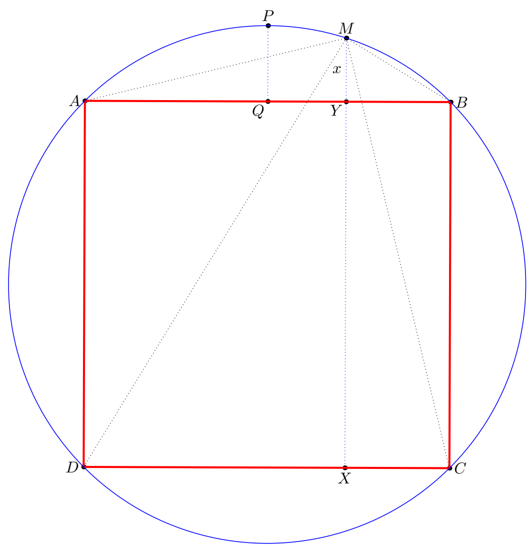
Ahora, el cociente buscado es

$$\frac{\binom{n}{k}^2}{2^{2n}} = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!n!} = \frac{(\prod_{k=1}^{n} 2k)(\prod_{k=1}^{n}(2k-1))}{2^{2n}n!n!} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)}{2^n n!}$$

$\square$

Solución 8

En la figura, sea $X \in DC$ tal que $MX \perp DC$, sea $Y = MX \cap AB$ y sean P, y Q los puntos medios del arco y la cuerda AB respectivamente.



Veamos que

$$A_{\triangle AMB} = \tfrac{1}{2}AM \cdot MB \sin \angle AMB = \tfrac{1}{2}AB \cdot MY$$

y

$$A_{\triangle DMC} = \tfrac{1}{2}DM \cdot MC \sin \angle DMC = \tfrac{1}{2}DC \cdot MX$$

Como $\angle AMB = 135$ y $\angle DMC = 45$, haciendo el cociente de las dos identidades anteriores obtenemos que

$$\frac{MC \cdot MD}{MA \cdot MB} = \frac{MX}{MY}.$$

haciendo $MY = x$ tenemos que

$$\frac{MC \cdot MD}{MA \cdot MB} = \frac{1+x}{x} = \frac{1}{x} + 1,$$

por tanto dicho cociente es decreciente en x lo que implica que su valor mínimo lo alcanza cuando x es máximo que es cuando Y es el punto medio de AB.

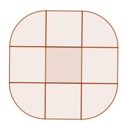
Calculemos $PQ = p$, considerando el punto diametralmente opuesto a P y usando potencia de puntos

$$p(1+p) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

de donde $p = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$. Finalmente el mínimo buscado es $\frac{1}{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}+1$, racionalizando obtenemos el valor $\boxed{2\sqrt{2}+3}$. $\square$

Solución 9

Consideremos, para cada cuadradito unitario, la siguiente figura formada por todos los puntos cuya distancia a dicho cuadradito es menor o igual que 1.



Está claro que los discos unitarios cuyos centros estén fuera de la región cubierta por estas figuras no intersectan a los cuadraditos unitarios. El área de dicha figura es $\pi + 5$. El centro de dicho cuadradito también tiene que estar a distancia mayor que 1 de los bordes del cuadrado grande, o sea, en el interior de un cuadrado de lado 13. Veamos que

$$20(\pi + 5) < 13^2$$

de donde las 20 figuras no consiguen cubrir el cuadrado de lado 13 lo que implica que podremos encontrar un punto donde ubicar el centro de nuestro disco unitario que no tocará a ninguno de los 20 cuadraditos. $\square$