Problemas

Problem 1. *Sea $ABCD$ un cuadrado y M el punto medio de AD. Los puntos E, F están en el segmento BM de modo que $AE \perp BM$ y $CF \perp BM$. Demuestra que $CE = DF$.*

Problem 2. *El conjunto A contiene 989 números naturales mayores o iguales que 1 y menores o iguales que 2021. Prueba que A contiene dos números a y b tales que $a + b$ es divisible por 43.*

Problem 3. *Prueba que existe un múltiplo de 2^{2021} cuya representación decimal contiene solo dígitos 1 y 2.*

Problem 4. *65 puntos del plano son seleccionados de modo que ellos determinan exactamente 2021 rectas diferentes. Prueba que al menos 4 de estos puntos son colineales.*

Problem 5. *El pentágono $ABCDE$ es cíclico y $AB = BD$. Las rectas BC y ED se intersectan en P y las rectas AC y BE se intersectan en Q. Prueba que $PQ \parallel AD$.*

Problem 6. *Sea $p_n(x)$ el polinomio mónico con raíces $-n, \frac{-n}{2}, \frac{-n}{3}, ..., -1$, donde n es un número natural. Prueba que la suma de los coeficientes de las potencias pares de x y la suma de los coeficientes de las potencias impares de x son ambos enteros.*

Problem 7. *Sea $n > 1$ un número natural y sea*

$$A_n = \{x \in \mathbb{N} | mcd(x, n) \neq 1\}$$

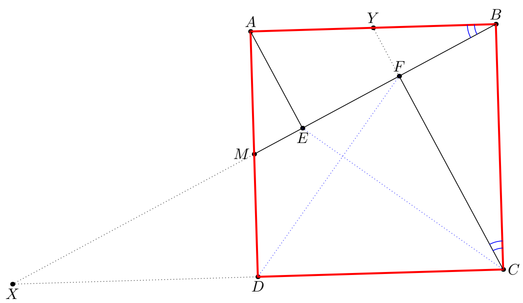
el conjunto de todos los números naturales n que no son primos relativos con n. Decimos que n es interesante si para todos $x, y \in A_n$ se cumple que $x + y \in A_n$. Encuentra todos los números interesantes.

Problem 8. *Sea I el incentro del $\triangle ABC$ y Ω la circunferencia circunscrita a dicho triángulo. La circunferencia de centro en A y radio AI corta a Ω in M, N. Demuestra que la recta MN es tangente a la circunferencia inscrita del $\triangle ABC$.*

Soluciones

Solución 1

Sean $X = BM \cap CD$ e $Y = AB \cap CF$.



- Veamos que $MD \parallel BC$ y $MD = \frac{1}{2}BC$ de donde MD es paralela media en el $\triangle XBC$ lo que implica que D es punto medio de la hipotenusa CX en el triángulo rectángulo CFX y de esta forma obtenemos que $DX = DC = DF$.

- Por otra parte $90 = \angle ABM + \angle MBC = \angle BCY + \angle MBC$, de donde $\angle ABM + \angle BCY$.

- Utilizando el punto anterior es fácil(a.l.a.) ver que $\triangle MAB = \triangle YBC$, de donde Y es el punto medio de AB.

- Como $YF \parallel AE$ tenemos que YF es paralela media en $\triangle AEB$, de donde F es punto medio de EB.

- El punto anterior garantiza que $BC = CE$.

Combinando el primer y el último punto obtenemos el resultado deseado. $\square$

Solución 2

Primeramente notemos que $2021 = 43 \cdot 47$.
Sea $A_0 = \{43, 86, \ldots, 2021\}$ los múltiplos de 43 menores o iguales que 2021.
Sea A_1 el subconjunto de $\{1, 2, \ldots, 2021\}$ formado por los 47 números que dejan resto 1 y los 47 números que dejan resto 42.

Sea A_2 el subconjunto de $\{1, 2, \ldots, 2021\}$ formado por los 47 números que dejan resto 2 y los 47 números que dejan resto 41.
Así sucesivamente. Sea A_{21} el subconjunto de $\{1, 2, \ldots, 2021\}$ formado por los 47 números que dejan resto 21 y los 47 números que dejan resto 22.
Veamos que $988 = 21 * 47 + 1$. Por principio del palomar en cualquier subconjunto A de 989 elementos o bien tengo al menos 2 de A_0 o bien tengo al menos 48 de alguno de los $A_i (1 \leq i \leq 21)$. En ambos casos tendría dos número cuya suma es múltiplo de 2021. $\square$

Solución 3

Veamos que $12 = 4 * 3$, $112 = 8 * 14$, $2112 = 16 * 132$.

Claim 1

Para todo n existe un múltiplo de 2^n formado por los dígitos 1 y 2 y con exactamente n cifras.

Demostración: Procediendo por inducción. El inicio lo tenemos. Supongamos que es cierto para $n = k$, esto es, existe x con k cifras formado por los dígitos 1 y 2 tal que $2^k | x$.
Sea $x = 2^k m$.
Si m es impar entonces $y = \overline{1x} = 10^k + x = 10^k + 2^k m = 2^k(5^k + m)$ es divisible por 2^{k+1}.
Si m es par entonces $y = \overline{2x} = 2 \cdot 10^k + x = 2 \cdot 10^k + 2^k m = 2^k(2 \cdot 5^k + m)$ es divisible por 2^{k+1}. $\square$

Solución 4

Vemos que en total tenemos $\binom{65}{2} = 2080$ parejas de puntos.

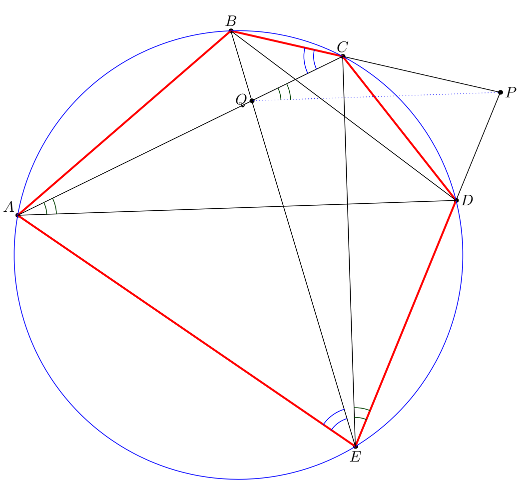
En la siguiente matriz,

$$\begin{array}{c} \\ p_1,p_2 \\ p_1,p_3 \\ \vdots \\ p_{64},p_{65} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} recta_1 & recta_2 & \ldots & recta_{2021} \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,2021} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,2021} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{2080,1} & a_{2080,2} & \cdots & a_{2080,2021} \end{bmatrix} \end{array}$$

tenemos una columna para cada recta y una fila para cada pareja de puntos. La entrada correspondiente es 1 si ambos puntos de la fila pertenecen a la recta que determina la columna y 0 en otro caso.
Primeramente veamos que en cada fila hay exactamente un 1, de donde la suma total de las entradas de la matriz es 2080 $(*)$.
Supongamos que no hay cuatro puntos colineales. Esto implica que en cada recta hay, o bien 2, o bien 3 puntos. Veamos que si una recta contiene 2 su respectiva columna suma 1 y si una recta tiene 3 puntos su respectiva columna suma 3. La suma total es impar!!! Estamos sumando una cantidad impar de números impares. Esto último contradice $(*)$, de donde como mínimo hay 4 puntos colineales.

$\square$

Solución 5



- Veamos que $AB = BD$ implica que EB es bisectriz del $\angle AED$, de donde
$$\angle PEB = \angle DEB = \angle BEA = \angle BCA$$
y tenemos que $PEQC$ es cíclico.

- De lo anterior tenemos que
$$\angle PQC = \angle PEC = \angle DEC = \angle DAC$$
lo que implica que $PQ \parallel AD$.

$\square$

Solución 6

Escribamos $P(x) = (x+n)\left(x+\frac{n}{2}\right)...\left(x+\frac{n}{n}\right)$. Sea M la suma de los coeficientes de las potencias pares de P y N la suma de los coeficientes de las potencias impares de P.
Veamos que $P(-1) = 0$, lo que implica que $M - N = 0$.
Veamos que $M + N = P(1) = (1+n)\left(1+\frac{n}{2}\right)...\left(1+\frac{n}{n}\right) = \binom{2n}{n}$.

Claim 2

$\binom{2n}{n}$ es par para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración: en un conjunto de $2n$ elementos los subconjuntos de tamaño n vienen en pares.
El problema concluye notando que $M = N = \frac{\binom{2n}{n}}{2} \in \mathbb{Z}$. $\square$

Solución 7

Claim 3

Si n tiene es de la forma p^k entonces es interesante.

Demostración: Sea $n = p^k$. Si $x, y \in A_n$ entonces $mcd(x, p^k) \neq 1$ y $mcd(y, p^k) \neq 1$ de donde $p|x$ y $p|y$ lo que implica que $p|x + y$, de donde $mcd(x + y, p^k) \neq 1$ y entonces $x + y \in A_n$.

Claim 4

Si n tiene 2 o más divisores primos entonces no es interesante.

Demostración: Sea $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ con $k \geq 2$.
Veamos que por el teorema chino de los restos existen x e y tales que

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod{p_1} \\ x &\equiv 0 \pmod{p_2} \\ x &\equiv 1 \pmod{p_i} \qquad \text{para todo } 2 \leq i \leq k. \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} y &\equiv 0 \pmod{p_1} \\ y &\equiv 1 \pmod{p_2} \\ y &\equiv 1 \pmod{p_i} \qquad \text{para todo } 2 \leq i \leq k. \end{aligned}$$

Está claro que $p_1|x$ y $p_2|y$ de donde ambos pertenecen a A_n.
Por otra parte

$$\begin{aligned} x + y &\equiv 1 \pmod{p_1} \\ x + y &\equiv 1 \pmod{p_2} \\ x + y &\equiv 2 \pmod{p_i} \qquad \text{para todo } 2 \leq i \leq k. \end{aligned}$$

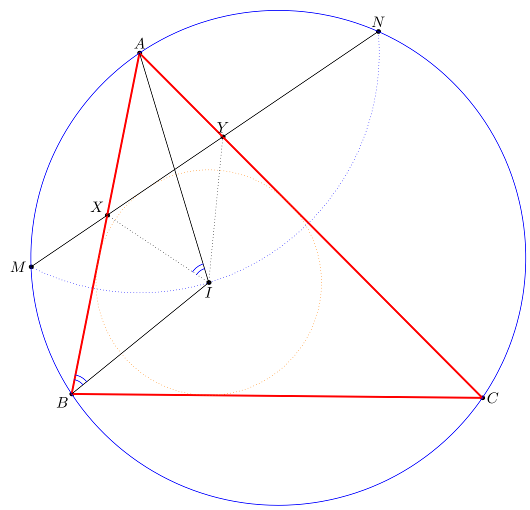
Como $p_i \geq 5$ para todo $2 \leq i \leq k$ tenemos que $x + y$ no es divisible por ninguno de los factores primos de n por tanto no está en A_n lo que implica que n no es interesante.

Combinando ambos claims concluimos que los números interesantes son los de la forma p^k con p primo.

$\square$

Solución 8

En la figura sea $X = MN \cap AB$ e $Y = MN \cap AC$.



- Sea ϕ la inversión centrada en A con radio AI. Veamos que $\phi(M) = M$ y $\phi(N) = N$ lo que implica que $\phi(\Omega)$ es la recta de MN, de donde $\phi(X) = B$ y $\phi(Y) = C$.

- Lo anterior implica que $BXYC$ es cíclico, de donde $\angle AXY = \angle ACB$.

- Veamos ahora que $AX \cdot AB = AI^2$, lo que implica que $\angle AIX = \angle IBA = \angle B/2$. Usando esto tenemos que

$$\angle BXI = \angle BAI + \angle AIX = \angle A/2 + \angle B/2.$$

- Combinando los dos puntos anteriores obtenemos que $\angle BXI = \angle IXY$, de donde XI es bisectriz del $\angle YXB$, por tanto I es el $A-$excentro del $\triangle AXY$, lo que implica que la inscrita del $\triangle ABC$ coincide con la A-exinscritra del $\triangle AXY$ lo que demuestra el resultado.

$\square$