Problemas

Problem 1. *Determina todos los números* $\overline{abcd}$ *tales que*

$$\overline{abcd} = 11(a+b+c+d)^2.$$

Problem 2. *Incialmente hay 7 trozos de papel en un cajón. Alicia selecciona algunos de estos trozos los divide en 7 trozos menores y los mezcla con el resto en el cajón. El proceso se repite una y otra vez.¿Podría Alicia tener exactamente 2021 trozos de papel en el cajón?*

Problem 3. *En el* $\triangle ABC$ *la bisectriz del* $\angle BAC$ *intersecta el lado* BC *en el punto* D. *La circunferencia* ω *pasa por* A *y es tangente a* BC *en* D. AC *y* ω *se intersectan en* M, BM *y* ω *se intersectan en* P. *Prueba que* P *pertenece a la mediana desde* A *en el* $\triangle ABD$.

Problem 4. *Sean* x, y, z *reales positivos que satisfacen* $x^2+y^2+z^2=1$. *Prueba que*

$$x^2yz + xy^2z + xyz^2 \leq \frac{1}{3}.$$

Problem 5. *En una fiesta hay* n *chicas y* n *chicos y se reproducen* m *canciones. Cada canción es bailada por al menos una pareja de chico y chica cada uno de los cuales recibe un punto. Prueba que para todos los enteros positivos* $k \leq n$ *es posible seleccionar* k *chicos y* $n-k$ *chicas tal que entre todos recibieron como mínimo* m *puntos.*

Problem 6. *En el* $\triangle ABC$ *con* $AB \neq AC$ *sea* M *el punto medio de* AB, *sea* K *el punto medio del arco* BAC *en el circuncírculo del* $\triangle ABC$ *y sea* P *la intersección de la mediatriz de* AC *con la bisectriz del* $\angle BAC$. *Prueba que* A, M, K, P *son concíclicos.*

Problem 7. *Sea* p *un número primo y sean* $x_1, x_2, ..., x_n$ *enteros. Prueba que si*

$$x_1^n + x_2^n + ... + x_p^n \equiv 0 \pmod p$$

para todos los enteros positivos n, *entonces* $x_1 \equiv x_2 \equiv ... \equiv x_p \pmod p$.

Soluciones

Solución 1

Veamos que

$$\begin{array}{rl} & 1000 \leq \overline{abcd} < 10000 \\ \Rightarrow & 91 \leq (a+b+c+d)^2 \leq 909 \\ \Rightarrow & (a+b+c+d) \in \{10, 11, \cdots, 30\} \end{array}$$

Por otra parte,

$$x \equiv \overline{abcd} \equiv a+b+c+d \pmod 9 \Rightarrow x \equiv 2x^2 \pmod 9$$

De los 9 restos posibles solo $x \equiv 0 \pmod 9$ y $x \equiv 5 \pmod 9$ cumplen la congruencia anterior, de donde

$$(a+b+c+d) \in \{14, 18, 23, 27\}.$$

Analizando los cuatro casos obtenemos las soluciones

$$\overline{abcd} \in \{2156, 3564, 5819\}.$$

$\square$

Solución 2

La respuesta es NO.
Veamos que si tenemos k trozos en el cajón y seleccionamos x de estos para realizar la operación la nueva cantidad de trozos es

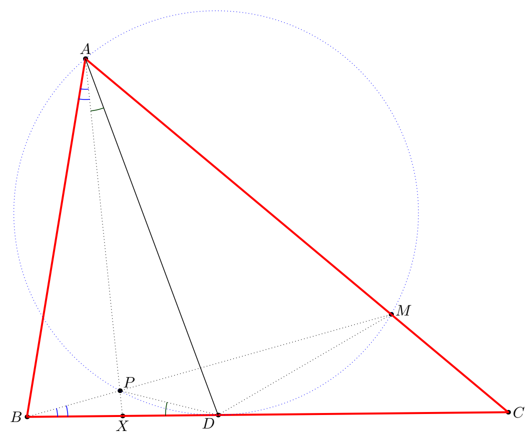
$$7x + (k - x) = k + 6x$$

de donde en cada paso estoy sumando un múltiplo de 6 a la cantidad de trozos en el cajón. Como el resto en la división por 6 no se altera concluimos que la cantidad de trozos de papel en el cajón es siempre congruente con 1 módulo 6 y como $2021 \equiv 5 \pmod 6$ concluimos que Alicia nunca puede tener 2021 trozos de papel en el cajón.

$\square$

Solución 3

En la figura, sea $X = AP \cap BC$.



Notemos primeramente que

$$\angle PAD = \angle PDX. \tag{1}$$

Por otra parte usando que $\angle DAC = \angle CDM$ y $\angle DAP = \angle DMP$ tenemos que

$$\begin{aligned} \angle PAB &= \angle DAB - \angle DAP \\ &= \angle DAC - \angle DMP \\ &= \angle CDM - \angle DMB \\ &= \angle DBM. \end{aligned} \tag{2}$$

Ahora, (1) y (2) implican que BD es tangente a las circunferencias circunscritas a $\triangle BPA$ y $\triangle DPA$. Por potencia de puntos

$$XD^2 = XP \cdot XA = XB^2,$$

de donde $XD = XB$ y queda demostrado el resultado. $\square$

Solución 4

Sabemos que

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

que además implica que

$$(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ac).$$

Teniendo esto en cuenta

$$1 = (x^2+y^2+z^2)^2 \geq 3((xy)^2+(yz)^2+(zx)^2) \geq 3(xy\cdot yz+yz\cdot zx+zx\cdot xy) = 3(x^2yz+xy^2z+xyz^2),$$

que es justo lo que necesitamos. $\square$

Solución 5

Sea $T \geq m$, la cantidad de parejas que bailaron luego de las m canciones. Sean $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ los puntos obtenidos por los chicos y sean $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ los puntos obtenidos por las chicas. Obviamente

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = T.$$

El caso $k = n$ es trivial. Fijemos $1 \leq k \leq n - 1$. Veamos que

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k} \geq a_k \geq a_{k+1} \geq \frac{a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_n}{n - k} = \frac{T - (a_1 + a_2 + \cdots + a_k)}{n - k}$$

lo que implica que

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k \geq \frac{Tk}{n}. \tag{3}$$

Análogamente

$$\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-k}}{n - k} \geq b_{n-k} \geq b_{n-k+1} \geq \frac{b_{n-k+1} + \cdots + b_n}{k} = \frac{T - (b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-k})}{k}$$

lo que implica que

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-k} \geq \frac{Tn - Tk}{n} \tag{4}$$

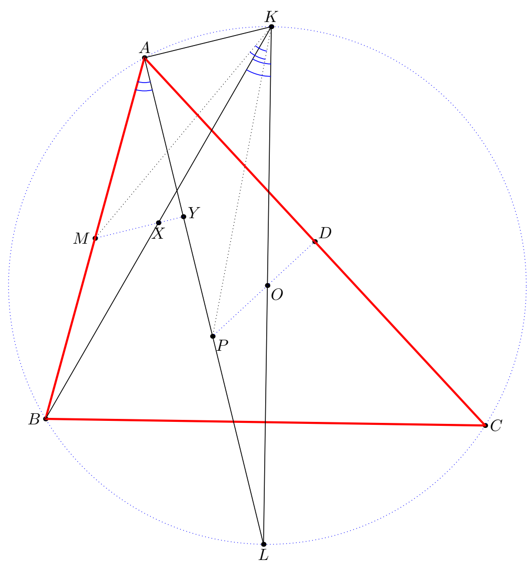
Sumando (3) y (4) tenemos que

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-k}) \geq T \geq m. \tag{5}$$

y hemos demostrado que hay k chicos y $n-k$ chicas que suman al menos m puntos. $\square$

Solución 6

En la figura sea L el punto medio del arco BC, sea D el punto medio de AC y sea O el circuncentro del $\triangle ABC$. Sean además $Y \in AL$ tal que $MY \perp AL$ y $X = MY \cap BK$.



- Veamos que $\angle YMA = \angle DPA$ lo que implica que $\angle XMB = \angle OPL$. Por otra parte $\angle MBX = \angle PLO$ al estar inscritos sobre el arco AK, de donde $\triangle XMB \sim \triangle OPL$.
- Como LAK es recto $AK \parallel MY$ de donde X es el punto medio de BK.
- Usando los dos resultados anteriores tenemos que $\frac{BM}{BK} = \frac{LP}{LK}$ lo que implica que $\triangle MBK \sim \triangle PLK$ y entonces $\angle MKB = \angle PKL$.
- Ahora,

  $$\angle MAP = \angle BKL = \angle BKP + \angle PKL = \angle BKP + \angle MKB = \angle MKP$$

De este último hecho se deduce el resultado deseado. $\square$

Solución 7

Veamos que por el binomio de Newton

$$(x_i - x_1)^{p-1} = x_i^{p-1} - x_1\binom{p-1}{1}x_i^{p-2} + x_1^2\binom{p-1}{2}x_i^{p-3} + \cdots + x_1^{p-1},$$

de donde

$$\begin{aligned}
&(x_1 - x_1)^{p-1} + (x_2 - x_1)^{p-1} + (x_3 - x_1)^{p-1} + \cdots + (x_p - x_1)^{p-1} \\
=&\sum_{i=1}^{p} x_i^{p-1} - x_1\binom{p-1}{1}\sum_{i=1}^{p} x_i^{p-2} + x_1^2\binom{p-1}{3}\sum_{i=1}^{p} x_i^{p-3} - \cdots + p\cdot a^{p-1} \\
\equiv&0 + 0 + 0 + \cdots + 0 \equiv 0 \pmod{p}
\end{aligned}$$

Por el pequeño teorema de Fermat en la siguiente suma

$$(x_1 - x_1)^{p-1} + (x_2 - x_1)^{p-1} + (x_3 - x_1)^{p-1} + \cdots + (x_p - x_1)^{p-1}$$

los restos de los sumandos son, o bien cero, o bien uno. Como el primero es cero, la única manera de que la suma sea múltiplo de p es que todos los sumandos sean múltiplos de p lo que implica que $x_i \equiv x_1 \pmod{p}$ para todo $1 \leq i \leq p$, lo que demuestra el resultado deseado.