Iberoamericana 2022
Problemas y Soluciones.

Héctor Raúl Fernández Morales
10001noesprimo@gmail.com

Septiembre, 2024

Día 1.

Problem 1. *Para un entero positivo n denotamos $d(n)$ a la cantidad de divisores positivos de n. Demostrar que para todo par de enteros positivos a, b se cumple que*

$$d(a) + d(b) \leq d(mcd(a, b)) + d(mcm(a, b))$$

y determinar para cuáles parejas de enteros (a, b) se cumple la igualdad.

Problem 2. *Sea ABC un triángulo y sean M y N los puntos medios de AB y AC respectivamente. Dado un punto D en BC, sean P y Q las intersecciones de DM y DN con AC y AB respectivamente. Sea R la intersección del circuncírculo de PAQ con el circuncírculo de NAM. Si K es el punto medio de AR, demostrar que $\angle MKN = 2\angle BAC$.*

Problem 3. *Sea O un punto fijo en el plano. Se tienen 2024 puntos rojos, 2024 puntos verdes y 2024 puntos azules en el plano distintos de O, tales que para cualesquiera dos colores, la envolvente convexa de los puntos de dichos colores contiene a O. Decimos que un punto rojo, un punto azul y un punto verde forman un triángulo boliviano si dicho triángulo contiene al punto O. Determinar el mayor entero positivo k tal que sin importar como se ubiquen los puntos, siempre hay al menos k triángulos bolivianos.*

Día 2.

Problem 4. *Se colorean algunos puntos del plano de rojo de manera que si P y Q son dos puntos rojos, y X es un punto tal que el triángulo PQX tiene ángulos de $30^o, 60^o, 90^o$ (en algún orden) entonces X es también rojo. Si los vértices ABC de un triángulo son todos rojos, demuestra que el baricentro de ABC también es rojo.*

Problem 5. *En un pizarrón están escritos algunos enteros positivos tales que no hay un entero positivo $k > 1$ que los divida a todos. Un movimiento consiste en escoger dos números a y b del pizarrón y reemplazarlos por $a - b$ y $2b$. Encontrar todos los conjuntos de números que pueden estar escritos inicialmente, para los que se puede lograr que luego de una cantidad finita de movimientos, todos los números escritos en el pizarrón sean iguales.*

Problem 6. *Determinar todos los conjuntos A de enteros positivos con la siguiente propiedad: A es infinito, y siempre que $a, b \in A$ y $a \geq b$, entonces $\lfloor \frac{a}{b} \rfloor \in A$, donde $\lfloor x \rfloor$ denota la parte entera de x.*

Soluciones

Solución 1 (Karla Yisel Ramírez)**.** Separemos el problema en casos:

- **Caso 1:** $a|b$ (Análogamente $b|a$)
  Sabemos que $mcd(a,b) = a$ y $mcm(a,b)$. De donde
  $$d(a) + d(b) = d(mcd(a,b)) + d(mcm(a,b)).$$
  Por lo que los a y b de esta forma representan casos de igualdad.

- **Caso 2:** $a \not| b$ y $b \not| a$
  Sean:
  $$a = \prod_{i=1}^{x} p_i^{\alpha_i - 1} \prod_{i=1}^{z} r_i^{\gamma_i - 1}$$
  $$b = \prod_{i=1}^{y} q_i^{\beta_i - 1} \prod_{i=1}^{z} r_i^{\delta_i - 1}$$
  Con p_i, r_i y q_i primos distintos $\forall i$; α_i, β_i, γ_i, $\delta_i \in \mathbb{N}$ mayores que 1 y x, y, $z \in \mathbb{N}$.
  Entonces:
  $$d(a) = \prod_{i=1}^{x} \alpha_i \prod_{i=1}^{z} \gamma_i$$
  $$d(b) = \prod_{i=1}^{y} \beta_i \prod_{i=1}^{z} \delta_i$$
  $$d(mcd(a,b)) = \prod_{i=1}^{z} min(\gamma_i, \delta_i)$$
  $$d(mcm(a,b)) = \prod_{i=1}^{x} \alpha_i \prod_{i=1}^{y} \beta_i \prod_{i=1}^{z} max(\gamma_i, \delta_i)$$
  Por la simetría respecto a a y b asumamos sin pérdida de la generalidad que $x \leq y$.

  - Si $x = 0$ tenemos que $\prod_{i=1}^{z} \gamma_i \neq \prod_{i=1}^{z} min(\gamma_i, \delta_i)$, de lo contrario se contradice que $a \not| b$. Entonces existe al menos un i para el cual $\gamma_i > \delta_i$.
    Sea X conjunto de índices i tales que $\gamma_i > \delta_i$, y Y el conjunto de índices i tales que $\delta_i \geq \gamma_i$. Sabemos que X no es vacío, y si todos los elementos de Y cumplen la igualdad entonces $\prod_{i=1}^{y} \beta_i \geq 2$ dado que $b \not| a$, por lo que podemos asegurar que
    $$\Big(\prod_{i=1}^{y} \beta_i \prod_{i \in Y} \delta_i - \prod_{i \in Y} \gamma_i\Big)\Big(\prod_{i \in X} \gamma_i - \prod_{i \in X} \delta_i\Big) > 0$$
    esto es equivalente a
    $$\prod_{i=1}^{y} \beta_i \prod_{i \in Y} \delta_i \prod_{i \in X} \gamma_i + \prod_{i \in Y} \gamma_i \prod_{i \in X} \delta_i > \prod_{i=1}^{z} \gamma_i + \prod_{i=1}^{y} \beta_i \prod_{i=1}^{z} \delta_i$$
    Lo que nos asegura que
    $$d(mcm(a,b)) + d(mcd(a,b)) > d(a) + d(b)$$

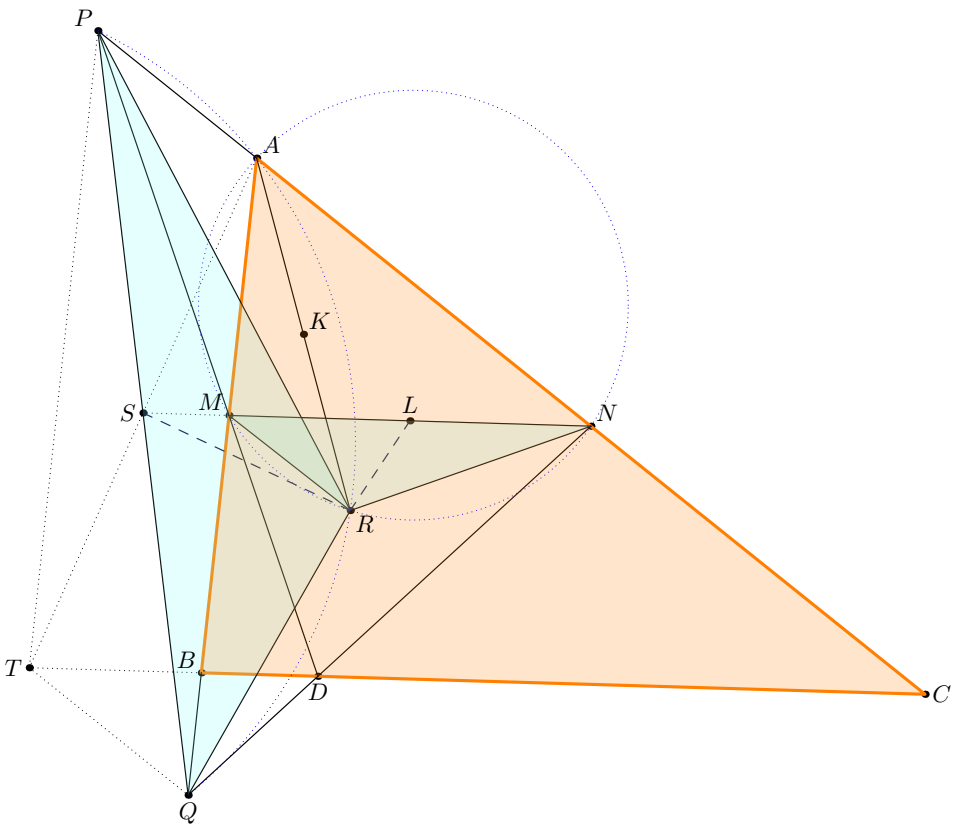
– Si $x \neq 0$ entonces $\prod_{i=1}^{x} \alpha_i \geq 2$ y $\prod_{i=1}^{y} \beta_i \geq 2$, de donde

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{x} \alpha_i \prod_{i=1}^{y} \beta_i \prod_{i=1}^{z} max(\gamma_i, \delta_i) + \prod_{i=1}^{z} min(\gamma_i, \delta_i) &> \prod_{i=1}^{x} \alpha_i \prod_{i=1}^{z} max(\gamma_i, \delta_i) + 2\Big(\prod_{i=1}^{y} \beta_i - 1\Big) \prod_{i=1}^{z} max(\gamma_i, \delta_i) \\ &\geq \prod_{i=1}^{x} \alpha_i \prod_{i=1}^{z} max(\gamma_i, \delta_i) + \prod_{i=1}^{y} \beta_i \prod_{i=1}^{z} max(\gamma_i, \delta_i) \\ &\geq \prod_{i=1}^{x} \alpha_i \prod_{i=1}^{z} \gamma_i + \prod_{i=1}^{y} \beta_i \prod_{i=1}^{z} \delta_i\end{aligned}$$

Entonces $d(mcm(a, b)) + d(mcd(a, b)) > d(a) + d(b)$.

Nota: En el último paso se usó que si $m, n \geq 2$, entonces $mn \geq m + 2n - 2$.

Solución 2. En la figura sea T de modo que $PAQT$ es un paralelogramo y sea S la intersección de las diagonales de dicho paralelogramo. Sea L el punto medio de MN.



Claim 2.1

$T \in BC$ y $S \in MN$.

Demostración. Veamos que aplicando Menelao en el $\triangle ABC$ con secante NQ tenemos que

$$\frac{NC \cdot BD \cdot AQ}{AN \cdot CD \cdot BQ} = 1$$

de donde $\frac{AQ}{BQ} = \frac{CD}{BD}$. Análogamente $\frac{PC}{AP} = \frac{CD}{BD}$ y concluimos que $\frac{AQ}{BQ} = \frac{PC}{AP}$. El teorema de Thales o tranversales implica que la paralela por P a AB y la paralela por Q a AC se cortan en BC.
Ahora, S es el punto medio de AT por tanto pertenece a la paralela media MN. □

Claim 2.2

AR es simediana del $\triangle MRN$.

Demostración. Veamos que

$$\angle QPR = \angle QAR = \angle MAR = \angle MNR$$

y

$$\angle RQP = \angle RAN = \angle RMN$$

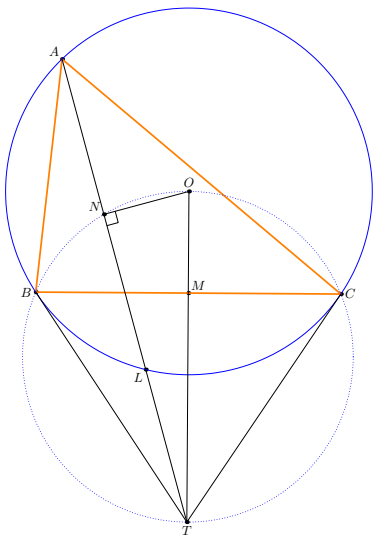
de donde $\triangle RQP \sim \triangle RMN$ o equivalentemente, hay una spiral similarity centrada en R que manda PQ a NM.
Veamos ahora que $\angle SPR = \angle RNR$, aquí usamos el claim previo, de donde $PNRS$ es cíclico y entonces $\angle PRS = \angle PNM$.
De la semejanza tenemos que $\angle NRL = \angle PRS$ y combinandolo todo

$$\angle NRL = \angle PRS = \angle ANM = \angle ARM$$

de donde AR es simediana del $\triangle MRN$. □

Lemma 1. *En un triángulo ABC sea AL la cuerda de (ABC) determinada por la A-simediana. Entonces el punto medio de dicha cuerda pertenece a (OBC).*

Demostración. Sabemos por el lema de la simediana que las tangentes a (ABC) por B y C se cortan en T que pertenece a la simediana.



Como N punto medio de la cuerda $\angle ONT = 90$, lo que implica que $N \in (OCTB)$. $\square$

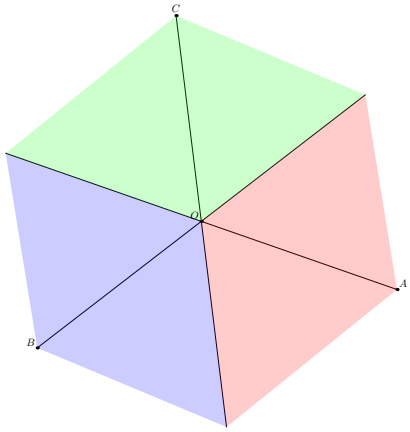
El problema es inmediato luego del segundo claim y el lema previo.

Solución 3 (Sebastián Lozada)**.** Veamos el siguiente resultado

Claim 3.1

Dados 5 puntos A, B, C, X, O en el plano con O en el interior de ABC, entonces O está en el interior de XAB, XBC o XCA.

Demostración. En la figura si



- X está en la zona verde O está contenido en XAB.
- X está en la zona roja O está contenido en XBC.
- X está en la zona azul O está contenido en XAC.

$\square$

Tomemos, sin pérdida de generalidad dos puntos verdes, V_1, V_2. Definamos ahora los conjuntos

$$\begin{aligned}
\overline{A_1} &= \{A \text{ azul } |O \in AV_1V_2\}, & |\overline{A_1}| &= \alpha \\
\overline{A_2} &= \{A \text{ azul } |O \notin AV_1V_2\}, & |\overline{A_2}| &= \beta \\
\overline{R_1} &= \{R \text{ rojo } |O \in RV_1V_2\}, & |\overline{R_1}| &= \theta \\
\overline{R_2} &= \{R \text{ rojo } |O \notin RV_1V_2\}, & |\overline{R_2}| &= \omega
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\alpha + \beta = \theta + \omega = 2024$ demostremos el siguiente claim

Claim 3.2

Hay al menos $\alpha\omega + \beta\theta$ triángulos bolivianos.

Demostración. Tomemos $A \in \overline{A_1}$ y $R \in \overline{R_2}$, esto implica por el Claim 3.1 que $O \in ARV_1$ ó $O \in ARV_2$. Por tanto para la pareja A, R existe al menos 1 verde que forma un triángulo boliviano. Análogamente para $A \in \overline{A_2}$ y $R \in \overline{R_1}$, por tanto hay al menos $\alpha\omega + \beta\theta$ parejas A, R distintas cada una con al menos 1 triángulo boliviano. □

Claim 3.3

Si $\{\alpha, \beta\} \neq \{2024, 0\}$ ó $\{\theta, \omega\} \neq \{2024, 0\}$ entonces hay al menos 2024 triángulos bolivianos.

Demostración. Supongamos que $\{\alpha, \beta\} \neq \{2024, 0\}$ (el otro caso es análogo), sean entonces

$$\begin{aligned} \alpha = 1012 + k,\ \beta = 1012 - k, \qquad & -1011 \leq k \leq 1011 \\ \theta = 1012 + p,\ \omega = 1012 - p, \qquad & -1012 \leq p \leq 1012 \end{aligned}$$

Por el Claim 3.2 sabemos que hay al menos $\alpha\omega + \beta\theta$ triángulos bolivianos

$$\begin{aligned} \alpha\omega + \beta\theta &= (1012 + k)(1012 - p) + (1012 - k)(1012 + p) \\ &= 2(1012^2 - kp) \\ &\geq 2(1012^2 - (1011)(1012)) \\ &= 2024 \end{aligned} \tag{1}$$

□

Veamos ahora el siguiente resultado

Claim 3.4

Si hay menos de 2024 triángulos bolivianos entonces no hay ninguno.

Demostración. Supongamos que existe una configuración con menos de 2024 triángulos bolivianos, entonces por el Claim 3.3

$$\{\alpha, \beta\} = \{2024, 0\} \text{ y } \{\theta, \omega\} = \{2024, 0\}. \tag{2}$$

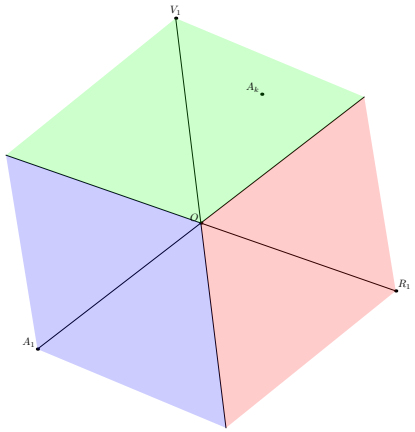
Si $\alpha = \omega = 0$ o $\alpha = \omega = 2024$ por la ecuación (1) tendríamos al menos 2024^2 triángulos, por tanto podemos asumir que

$$\alpha = \theta \text{ y } \beta = \omega. \tag{3}$$

Supongamos que existe un triángulo boliviano $A_1R_1V_1$. Sabemos que de los 2024 triángulos $A_1R_1V_1, A_2R_1V_1, \ldots A_{2024}R_1V_1$ al menos uno no es boliviano, sea este $A_kR_1V_1$.
Sean las regiones

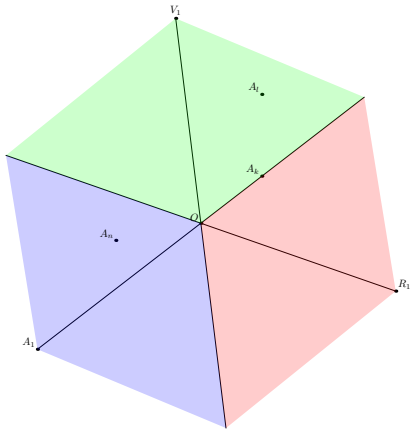
$$\begin{aligned} S_A &= \{X \mid O \in XV_1R_1\} \\ S_V &= \{X \mid O \in XA_1R_1\} \\ S_R &= \{X \mid O \in XV_1A_1\} \end{aligned}$$

Caso 1: $A_k \notin S_V \cap S_R$.
Sin pérdida de generalidad sea $A_k \in S_V$ y $A_k \notin S_R$.



Veamos que el número de triángulos bolivianos AAR es mayor que cero, por el (2) son 2024, entonces (3) implica que el número de triángulos AAV que no son bolivianos es 0. ↯

Caso 2: $A_k \in S_V \cap S_R$.
Sin pérdida de generalidad sea $A_k \in S_V$ y $A_k \notin S_R$.



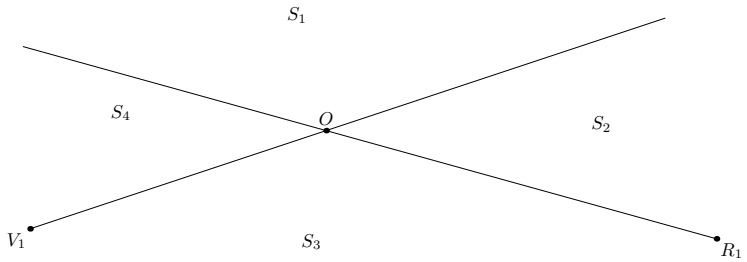
Si existe $A_l \in (S_V \cup S_R) \setminus (S_V \cap S_R)$. Descartamos A_k y usamos A_l para caer en el caso anterior. Si existe $A_n \in S_A$, A_n está fuera de la recta A_1OA_k porque no hay 3 azules colineales. En este caso descartamos $A_1V_1R_1$ y usamos $A_nV_1R_1$ con A_k para caer en el caso anterior.
Hemos llegado en cualquier caso a una contradicción por tanto la suposición de que existe un triángulo boliviano es falsa. □

Demostremos nuestro último claim.

Claim 3.5

Si no hay triángulos bolivianos entonces alguna de las cápsulas convexas, AV, VR, AR no contiene a O.

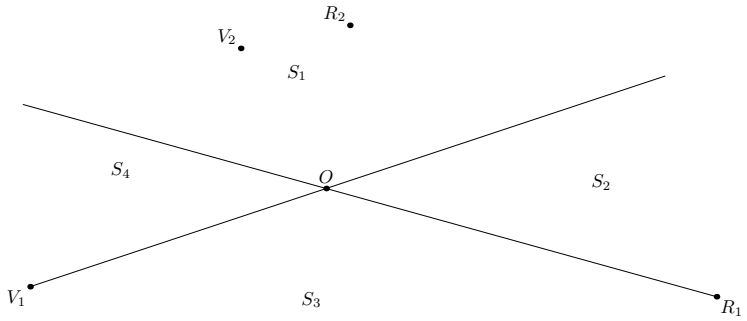
Demostración. Asumamos que no hay triángulos bolivianos.
Entre todos los posibles ángulos en O formados por colores distintos, sin pérdida de generalidad sea $\angle V_1OR_1$ el mayor. Veamos que no puede medir $180°$ porque con cualquier azul formaría un triángulo boliviano.
Sean S_1, S_2, S_3, S_4 las regiones determinadas por las rectas V_1O y R_1O como muestra la figura



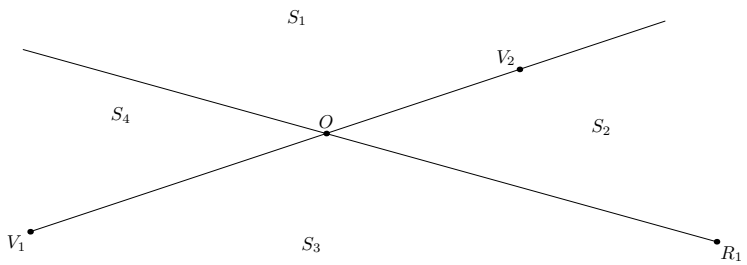
Tomemos un punto azul A.

$$A \in S_4 \text{ contradice la maximalidad del ángulo}$$
$$A \in S_2 \text{ contradice la maximalidad del ángulo}$$
$$A \in S_1 \text{ implica que } V_1R_1A \text{ es boliviano}$$

de donde todos los azules están en S_3.
Veamos dos casos.
Caso 1: no hay verdes en $S_1 \cap S_2$ ni rojos en $S_1 \cap S_4$.
No hay verdes en S_4 por la maximalidad del ángulo. Si todos los verdes están en $S_2 \setminus S_1$ la cápsula convexa AV no contiene a O. Podemos asumir que hay algun verde V_2 en el interior de S_1, análogamente hay algún rojo R_2 en el interior de S_1.
Veamos ahora que $O \in V_1V_2R_1$ y $O \notin V_2R_2R_1$.

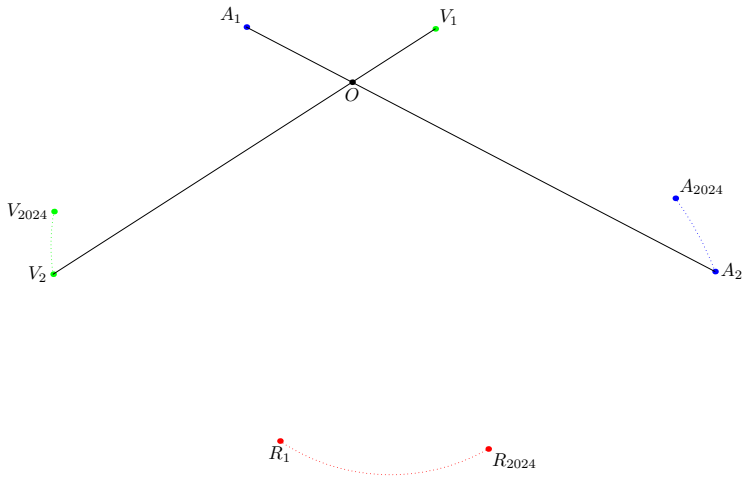


Esto contradice el Claim 3.3 y (3).
Caso 2: Hay algun verde en $S_1 \cap S_2$ o algun rojos en $S_1 \cap S_4$.
Asumamos que hay un verde V_2 en $S_1 \cap S_2$.



Si hay un rojo R en $S_1 \cup S_4$, tomamos cualquier azul A y entonces uno de los triángulos V_2RA, V_1RA es boliviano. Todos los rojos están en $S_3 \cup S_2$ lo que implica que la cápsula convexa RA no contiene a O. $\square$

Veamos que Claim 3.5 implica que hay al menos 1 triángulo boliviano y entonces Claim 3.4 implica que por lo menos hay 2024.
Finalmente veamos la siguiente configuración



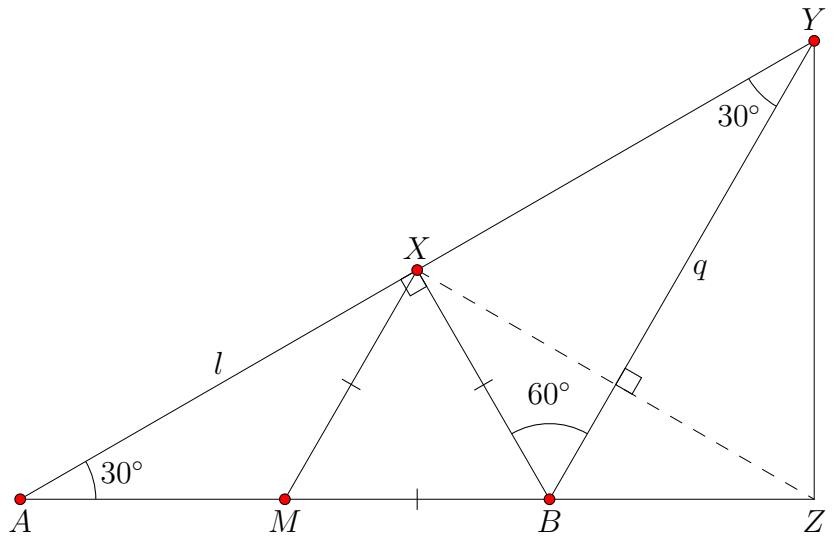
- No hay 3 colineales.
- Las 3 cápsulas convexas posibles continen a O.
- Hay **exactamente** 2024 triángulos bolivianos, los formados con cualquier rojo y A_1, V_1.

Solución 4 (Ricardo Miguel Molano)**.** Demostremos el siguiente claim

Claim 4.1

Teniendo 2 puntos rojos, su punto medio también es rojo.

Demostración. Sean A, B dos puntos rojos. Sea X tal que $\angle XAB = 30°$ y $\angle XBA = 60°$, por tanto X **es rojo**.
Sea Y el simétrico de A con respecto a X, por simetría,Y **es rojo**.
Sea Z la reflexión del punto X con respecto a BY. Por simetría Z **es rojo**.
Ahora, $\angle ABX = \angle XBY = \angle YBZ = 60^o$ por tanto Z está en la recta AB y como $\angle BXY = \angle BZY = 90°$ se tiene que $BXYZ$ es cíclico, de donde $\angle XZB = \angle XYB = 30°$ (1).



Sea M el punto medio de AB. Como $MX = MB$ tenemos que $\triangle BMX$ es equilátero y entonce $\angle XMZ = 60°$ (2).
Por (1), (2) M **es rojo**. $\square$

Claim 4.2

Teniendo 2 puntos rojos, los 2 puntos que dividen al segmento que forman en 3 partes iguales son rojos.

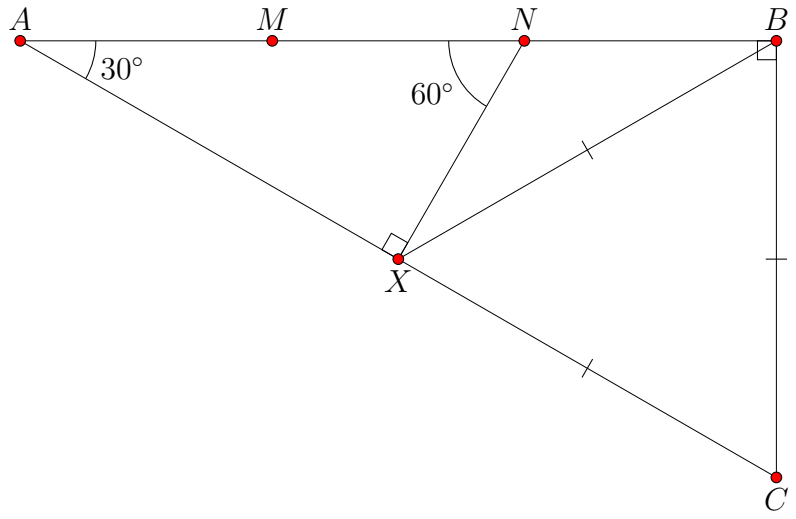
Demostración. Sean A, B dos puntos rojos. Sea C tal por $\angle BAC = 30°$ y $\angle BCA = 60°$, por tanto C **es rojo**.
Sea X el punto medio de A, por el claim anterioir X **es rojo**.
Sea $N \in AB$ tal que $\angle NXA = 90°$, por tanto N **es rojo**.
Veamos que $\triangle BXC$ es equilátero lo que implica que

$$\angle NXB = \angle NXC - \angle BXC = 90° - 60° = 30°$$

y

$$\angle NBX = \angle NBC - \angle XBC = 90° - 60° = 30°$$

de donde $\triangle NXB$ es isósceles y $XN = NB$ (1).



Por otra parte sea M el punto medio de AN, por el claim anterior M **es rojo**.
Como $\angle NAX = 30°$ sabemos que $XN = NM = MA$ (2).
Combinando (1) y (2) tenemos que N, M trisecan AB y hemos concluido la demostración del claim . $\square$

Para concluir veamos que si M es el punto medio del lado AB del $\triangle ABC$, por el primer claim M **es rojo**.

Sea G el baricentro del $\triangle ABC$, como $\frac{GA}{GM} = 2$ por el segundo claim G **es rojo** y queda finalizado el problema.

Solución 5 (Dan Vancea)**.** Sea S la suma $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + x$. Probaremos que los x tales que se pueda cumplir el objetivo son aquellos que cumplen $S = 2^k(n+1)$ para $k \geq 0$.

Claim 5.1

S es constante a lo largo de la secuencia de movimientos.

Demostración. Después de un movimiento a y b se sustituyen por $a - b$ y $2b$. Luego $a + b = (a - b) + 2b$, y como el resto de números no cambian, S es constante. $\square$

Claim 5.2

$S = 2^k(n+1)$,

Demostración. Supongamos que al final de la secuencia de movimientos tenemos que todos los números son z. Luego S es la suma de z, $n+1$ veces, o $S = z(n+1)$.
Veamos que ocurre si $z = 2^k m$ con $m > 1$ y $2 \nmid m$. Sea p un primo tal que $p \mid m$. Luego $p \mid z$. Es fácil ver que si $p \neq 2$, $p \mid a$ y $p \mid b$ entonces $p \mid a - b$ y $p \mid 2b$. Además, también es cierto lo opuesto: si $p \mid a - b$ y $p \mid 2b$, $p \mid b$ pues $p \neq 2$, así que $p \mid (a - b) + b = a$. Esto implica que si al final todos son múltiplos de p, también lo serían al inicio y esto contradice la condición inicial del problema, de donde $z = 2^k$. $\square$

Claim 5.3

Para todo conjunto de números $a_1, a_2, \ldots, a_n, x$ tal que $S = 2^k(n+1)$ existe una secuencia de movimientos finita que acabe con todos ellos iguales.

Demostración. Probaremos esto utilizando inducción sobre k. Para ello utilizamos un algoritmo para conseguir la secuencia de movimientos. En cada paso, hacemos unos movimientos tal que todos los números sean pares. Sean $b_1, b_2, \ldots, b_n, y$ los números después de los movimientos. Una vez hemos logrado esto,afirmamos que la secuencia de movimientos restantes es aquella que hace que $\frac{b_1}{2}, \frac{b_2}{2}, \ldots, \frac{b_n}{2}, \frac{y}{2}$ acabe en números iguales. Esta secuencia tiene suma $\frac{S}{2} = 2^{k-1}(n+1)$, así completando el paso inductivo.

Para el caso $k = 0$, puesto que $a_1, a_2, \ldots, a_n, x$ son $n+1$ enteros positivos y su suma es $n+1$, todos han de ser 1, en cuyo caso todos son iguales y hemos terminado.

Ahora describimos el algoritmo. Este consiste en escoger dos números impares diferentes y aplicar un movimiento sobre ellos. La cantidad de números impares es par por la paridad de S (pues asumimos $k > 0$), así que con cada movimiento eliminamos 2 números impares y eventualmente los reduciremos a 0.

Supongamos que en algun momento todos los números impares sean iguales (sea w este número impar), en cuyo caso no podemos aplicar un movimiento entre dos de ellos.

Caso 1: Existe un par $p \neq 2w$.

Caso 1.1: Si $w > p$ tomando w, p cambiamos a $w - p, 2p$ que mantiene la cantidad de impares pero en el siguiente paso tomamos, $w - p, w$ cambiamos a $p, 2(w-p)$ que son ambos pares y de esta formas se reduce la cantidad de impares.

Caso 1.2: Si $w < p$ tomando w, p cambiamos a $p - w, 2w$ que mantiene la cantidad de impares pero en el siguiente paso tomamos, $p - w, w$ y se reduce la cantidad de impares puesto que $p \neq 2w$.

Caso 2: Todos los números pares son iguales a $2w$. Probamos que esto no es posible utilizando el argumento anterior de los primos: Si $w > 1$ existe un p impar que divide a w, así que como todos los números son divisibles entre p, también lo eran al principio y tenemos una contradicción. Si $w = 1$, la suma de j unos y $n+1-j$ doses se halla entre $n+1$ y $2(n+1)$, así que no es posible que S sea de la forma $2^k(n+1)$.

Luego siempre es posible ejecutar el algoritmo, y solamente para todo conjunto de números $a_1, a_2, \ldots, a_n, x$ que cumpla $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + x = 2^k(n+1)$ para $k \geq 0$ se puede encontrar una secuencia finita de movimientos tal que los números acaben siendo iguales. $\square$

Solución 6 (Javier Badesa)**.** Los conjuntos infinitos con la propiedad del enunciado son $A = \mathbb{N}^+$ y los de la forma $A = \{z^k : k \in \mathbb{N}_0\}$ con $z \neq 1$ un entero positivo (y siendo $\mathbb{N}^+$ el conjunto de los enteros positivos y $\mathbb{N}_0$ el de los enteros no negativos). Es evidente que $A = \mathbb{N}^+$ funciona porque $\forall a, b \in \mathbb{N}^+$ con $a \geq b$ es trivial ver que como $\frac{a}{b} \geq 1$ entonces $\lfloor \frac{a}{b} \rfloor \in \mathbb{N}^+$. También es evidente que $A = \{z^k : k \in \mathbb{N}_0\}$ cumple la propiedad porque $\forall a, b \in A$ $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$ tales que $a = z^\alpha, b = z^\beta$ y $\alpha \geq \beta$, y se observa que $\lfloor \frac{a}{b} \rfloor = \lfloor \frac{z^\alpha}{z^\beta} \rfloor = z^{\alpha-\beta} \in A$.

A partir de ahora, procedemos por reducción al absurdo, asumiendo que existiese un A que no fuese de ninguna de las formas antes mencionadas pero cumpliese la propiedad. Como

$A \neq \mathbb{N}^+$ y $1 \in A$ (lo que se observa tomando $a = b$ en la condición), existe algún entero positivo $t > 1$ tal que $t - 1 \notin A$ y $t \in A$. Sea w el menor entero positivo para el que existe algún entero positivo r tal que $w^r = t$ (nótese que $w > 1$ porque $t > 1$). Por la minimalidad de w se tiene que $\gcd_{p \in \{q \in \mathbb{P} : q | w\}}(\nu_p(w)) = 1$.

Claim 6.1

Para todo α irracional positivo y ϵ real positivo, existe algún entero positivo z tal que $\{z\alpha\} < \epsilon$ (denotando por $\{x\}$ la parte decimal de x).

Demostración. Sea n un entero positivo tal que $n > \frac{1}{\epsilon}$.
Definimos $a_0, a_1, ..., a_n$ de modo que $a_i = \{i\alpha\}$ $\forall i \in \{0, 1, ..., n\}$ (y entonces $0 \leq a_0, a_1, ..., a_n < 1$). Nótese que estos números son distintos dos a dos, pues $a_i = a_j \Rightarrow \{i\alpha\} = \{j\alpha\} \Rightarrow \{i\alpha\} - \{j\alpha\} = 0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow i\alpha - j\alpha \in \mathbb{Z} \Rightarrow (i - j)\alpha \in Z \Rightarrow i - j = 0 \Rightarrow i = j$ (donde hemos usado que α es irracional y $i - j$ entero, por lo que si su producto es racional $i - j = 0$).
Definimos $b_0, b_1, ..., b_n$ de modo que $(b_0, b_1, ..., b_n)$ es la permutación de $(a_0, a_1, ..., a_n)$ que cumple $0 \leq b_0 < b_1 < b_2 < ... < b_n < 1$, de modo que $\sum_{i=1}^{n} (b_i - b_{i-1}) = b_n - b_0 < 1 - 0 = 1$, y por el principio del palomar (generalizado a reales positivos), como $b_i - b_{i-1} > 0$ $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$, entonces $\exists k \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que $0 < b_k - b_{k-1} < \frac{1}{n} < \epsilon$. Por tanto, existen $u, v \in \{1, 2, ..., n\}$ tales que $u \neq v$ y $0 < a_u - a_v < \epsilon$.
Si $u > v$, entonces basta tomar $z = u - v$ y se ve que $\{z\alpha\} = \{(u - v)\alpha\} = \{u\alpha\} - \{v\alpha\} = a_u - a_v < \epsilon$.
En caso contrario, sea $L = v - u$ y obsérvese que $\{L\alpha\} = \{(v - u)\alpha\} = 1 + \{v\alpha\} - \{u\alpha\} = 1 - (a_u - a_v) > 1 - \epsilon$. Sea μ el máximo entero positivo tal que $\mu(1 - \{L\alpha\}) < 1$. Si $\{\mu L\alpha\} \geq \epsilon$, entonces $1 - (\mu + 1)(1 - \{L\alpha\}) = -(1 - \{L\alpha\}) + (1 - \mu(1 - \{L\alpha\})) = -(1 - \{L\alpha\}) + \{1 - \mu(1 - \{L\alpha\})\} = -(1 - \{L\alpha\}) + \{\mu L\alpha\} > -\epsilon + \epsilon = 0 \Rightarrow (1 + \mu)(1 - \{L\alpha\}) < 1$, lo que contradiría la maximalidad de μ. En consecuencia, $\{\mu L\alpha\} < \epsilon$, por lo que basta tomar $z = \mu L$. $\square$

Claim 6.2

Para todo $a, b \in A$ y n entero positivo tales que $a \geq b^n$, $\lfloor \frac{a}{b^n} \rfloor \in A$.

Demostración. Lo probamos por inducción en n. El caso base es trivial por la condición del enunciado. Ahora, asumiendo que sea válido para n, entonces para $n + 1$ podemos tomar $a' = \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$, y como $a' = \lfloor \frac{a}{b} \rfloor \geq \lfloor \frac{b^{n+1}}{b} \rfloor = b^n$, aplicando la hipótesis de inducción $\lfloor \frac{a}{b^{n+1}} \rfloor = \lfloor \frac{\lfloor \frac{a}{b} \rfloor}{b^n} \rfloor = \lfloor \frac{a'}{b^n} \rfloor \in A$. $\square$

Claim 6.3

Para todo $a \in A$ existe u entero no negativo tal que $a = w^u$.

Demostración. Procedemos por reducción al absurdo, asumiendo que existiese algún $a \in A$ para el que esto no se cumpliese. Entonces $a > 1$ porque de lo contrario bastaría tomar $u = 0$. Sea $\alpha = \log_t(a) > 0$. Observamos que $\alpha \in \mathbb{Q} \Rightarrow \alpha = \exists c, d \in \mathbb{N}^+$ tales que $\frac{c}{d} = \alpha$, de donde

$$\log_t(a) = \frac{c}{d} \Rightarrow a = t^{\frac{c}{d}} \Rightarrow a^d = w^{rc} \Rightarrow \nu_p(a^d) = \nu_p(w^{rc}) \text{ para todo primo } p|w,$$

lo que implica que

$$d\nu_p(a) = rc\nu_p(w) \text{ para todo primo } p|w \Rightarrow d|rc \quad \gcd_{p\in\{q\in\mathbb{P}:q|w\}} (\nu_p(w)) = rc,$$

y llegaríamos a contradicción tomando $u = \frac{rc}{d}$ porque $a = t^{\frac{c}{d}} = w^{\frac{rc}{d}} = w^u$. Por tanto, α es irracional.
Tomando $\epsilon = \log_t(\frac{t^2}{t^2-1})$, por el Claim 6.1 existe algún entero positivo z tal que $0 < \{z\alpha\} < \epsilon$ (la primera desigualdad es clara, porque de lo contrario $\{z\alpha\} = 0 \Rightarrow z\alpha \in \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha \in \mathbb{Q}$. Consideramos

- un entero positivo K tal que $\frac{K}{K-1} < t^{\{z\alpha\}}$ y $K > t+1$
- $W \in A$ tal que $W > Kt^{y+1}a^z$ (que existe porque A tiene infinitos elementos), siendo $y = \lfloor z\alpha \rfloor$.

Por el Claim 6.2, sean

- $\theta = \lfloor \frac{W}{t^{y+1}} \rfloor \in A$
- $t\mu + \lambda = \lfloor \frac{W}{a^z} \rfloor \in A$
- $\mu = \lfloor \frac{\lfloor \frac{W}{a^z} \rfloor}{t} \rfloor = \lfloor \frac{W}{ta^z} \rfloor \in A$

Entonces

$$\frac{\theta}{\mu} = \frac{\lfloor \frac{W}{t^{y+1}} \rfloor}{\lfloor \frac{W}{ta^z} \rfloor} \leq \frac{\frac{W}{t^{y+1}}}{\frac{W(K-1)}{Kta^z}} = \frac{K}{K-1} t^{\epsilon} < \frac{t+1}{t} \frac{t^2}{t^2-1} = \frac{t}{t-1}$$

de donde

$$\frac{t\mu + \lambda}{\theta} > t - 1$$

y

$$\frac{t\mu + \lambda}{\theta} = \frac{\lfloor \frac{W}{a^z} \rfloor}{\lfloor \frac{W}{t^{y+1}} \rfloor} \leq \frac{\frac{W}{a^z}}{\frac{W(K-1)}{Kt^{y+1}}} = \frac{\frac{K}{K-1}}{t^{\{z\alpha\}}} t < t$$

Como la primera desigualdad implica que $t\mu + \lambda > \theta$, entonces $t - 1 = \lfloor \frac{t\mu+\lambda}{\theta} \rfloor \in A$, que es una contradicción.

Llamamos ahora e al menor entero positivo tal que $w^e \in A$, y definimos $U = w^e \in A$. □

Claim 6.4

Para todo $a \in A$ y j entero no negativo tal que $w^j \in A$ (que existe por el claim 4), $e|j$.

Demostración. De lo contrario, sea J el mínimo valor tal que $e \nmid J$ pero $w^J \in A$. Entonces $w^J > w^e$ (obviamente $J \neq 0$), por lo que $w^{J-e} = \lfloor \frac{w^J}{w^e} \rfloor \in A$, que contradice la minimalidad de J (nótese que $e \nmid J - e$). □

Claim 6.5

Para todo j entero no negativo, $U^j \in A$.

Demostración. Combinando los Claim 6.3 y Claim 6.4, se deduce que todos los elementos de A son potencias de U. Por la infinitud de A, existe algún entero no negativo $\lambda > j$ con $U^\lambda \in A$, por lo que usando el Claim 6.2, $U^j = \lfloor \frac{U^\lambda}{U^{\lambda-j}} \rfloor \in A$. $\square$

Combinado Claim 6.3,Claim 6.4,Claim 6.5, se ve que $A = \{U^k : k \in \mathbb{N}_0\}$, que es contradicción. Por tanto todos los conjuntos válidos son los descritos al principio de la solución, como queríamos probar. $\square$