Butterfly theorem.

Héctor Raúl Fernández Morales
10001noesprimo@gmail.com

diciembre, 2022

Este documento está dedicado a la aplicación del **teorema de la mariposa**(así como algunas de sus variantes y generalizaciones) a la resolución de problemas de Olimpiadas.

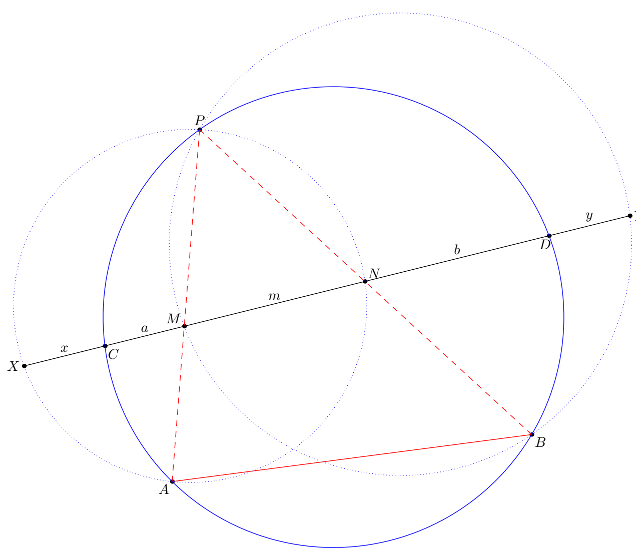
1 Lema de Haruki

Lemma 1. *(Haruki) Sean A, C, D, B puntos de una circuferencia, ubicados en ese orden. Sea P un punto en el arco CD que no contien a A y B. Se definen $M = PA \cap CD$ y $N = PB \cap CD$. La recta determinada por CD corta a la circunferencia circunscrita del $\triangle PNA$ en X y a la circunferencia circunscrita a $\triangle PMB$ en Y. Entonces se cumple*

$$XC = YD = \frac{CM \cdot BN}{MN}$$

y dicho cociente no depende de la elección de P.

Proof:



Veamos que $\angle AXN = \angle APB$ que es fijo, de donde X es un punto fijo de la recta CD. Análogamente Y.

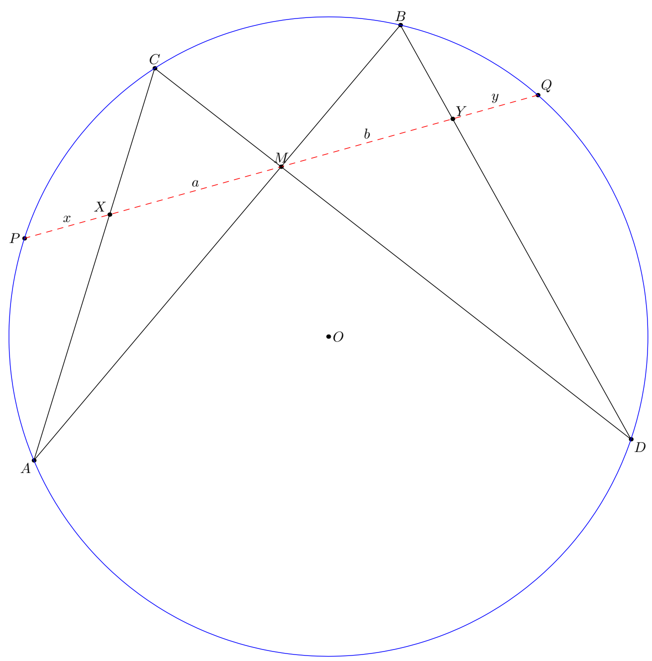
Por potencia de puntos $m(a+x) = PM \cdot MA = a(b+m)$ lo que implica que $mx = ab$, análogamente $my = ab$, de donde $x = y = \frac{ab}{m}$ lo que implica que $XC = YD = \frac{CM \cdot BN}{MN}$.

Como X, Y son fijos dicho cociente no depende de la elección de P. ■

2 Teorema de la mariposa

Theorem 1. *Sean AB, CD, PQ tres cuerdas de una circunferencia que se cortan en el punto M, entonces M es el punto medio de PQ si y solamente si M es el punto medio de XY.*

Proof:



Supongamos que M es el punto medio de PQ. Entonces $x + a = b + y = l$. Usando el lema de Haruki tenemos que

$$\frac{xl}{a} = \frac{yl}{b}$$

de donde

$$b(l-a) = a(l-b) \Rightarrow a = b$$

de donde M es el punto medio de XY.

Supongamos ahora que M es el punto medio de XY. Entonces ,usando Haruki nuevamente obtenemos que

$$\frac{x(b+y)}{a} = \frac{y(a+x)}{b}$$

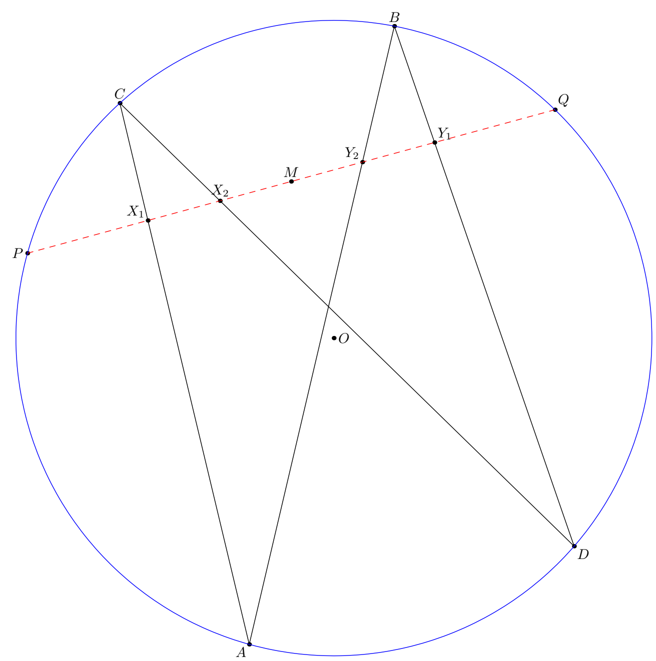
como $a = b$ lo anterior implica que $x = y$, de donde M es el punto medio de PQ.

■

3 Generalización

Theorem 2. *Sean AB, CD, PQ tres cuerdas de una circunferencia. Sea M el punto medio de PQ y sean X_1, X_2, Y_1, Y_2 los puntos donde las cuerdas CA, CD, BD, BA cortan a PQ, entonces cualesquiera dos de las siguientes implican la tercera*

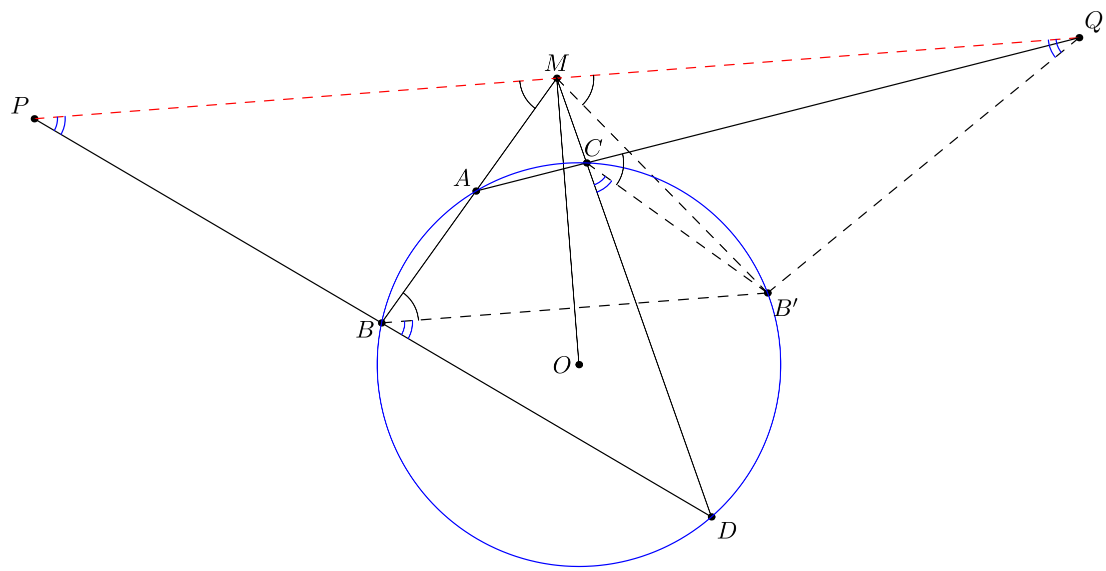
- *M es el punto medio de PQ.*
- *M es el punto medio de X_1Y_1.*
- *M es el punto medio de X_2Y_2.*



4 Versión exterior

Theorem 3. *Sea Ω una circunferencia de centro O, AB y CD cuerdas de Ω que se cortan en un punto exterior M. Las rectas DB y AC cortan a la perpendicular a MO por M en los puntos P y Q respectivamente. Entonces se cumple que $MP = MQ$.*

Proof: En la figura, definamos B' como el simétrico de B con respecto a MO.



Veamos que $PQ \parallel BB'$ y por dicha simetría,

$$\angle QMB' = \angle PMB = \angle B'BM = \angle B'CQ$$

de donde $MQB'C$ es cíclico lo que implica que

$$\angle MQB' = \angle B'CD = \angle B'BD = \angle DPQ$$

de aquí que $\triangle PMB = \triangle QMB'$ y concluimos que $MP = MQ$. ■

5 Lista de Problemas

Problem 1. *Usando la técnica del teorema* 3*, demuestra una de las implicaciones del teorema* 1*.*

Problem 2. *Usando el lema de Haruki demuestra el teorema* 2*.*

Problem 3. *Sean AB, CD, PQ cuerdas de una circunferencia que concurren en M. Sea $X = PQ \cap \odot(MAD)$ e $Y = PQ \cap \odot(MBC)$. Si $MP = MQ$ prueba que $MX = MY$.*

Problem 4. *Sea H el ortocentro del $\triangle ABC$ y sea D el punto medio de BC. La recta por H perpendicular a DH corta a AB y AC en los puntos X e Y , respectivamente. Prueba que $DX = DY$.*

Problem 5. *La circunferencia ω pasa por los vértices B y C del $\triangle ABC$ con $AB \neq AC$, ω intersecta a AB y AC en los puntos R y S, respectivamente. Sea M el punto medio de BC. La recta perpendicular a MA en A intersecta BS y CR en K y T, respectivamente. Si $AT = AK$, prueba que $MS = MR$.*

Problem 6. *(IMO Short List 1996) Sea $\triangle ABC$ acutángulo y sea AD altura tal que H es el ortocentro y O el circuncentro. La recta perpendicular por D a OD intersecta AC en K . Prueba que $\angle DHK = \angle C$.*

Problem 7. *(Ibero Short List 2014) $ABCD$ es un cuadrilátero convexo inscrito en una circunferencia de centro O. En los lados AB y CD se consideran los puntos F y E respectivamente tal que $EO = FO$. Las rectas AD y BC intersectan la recta EF en M y N respectivamente. Finalmente, el punto P es simétrico de M conrespecto al punto medio de AE. Prueba que $\triangle FBN \sim \triangle CEP$.*

Problem 8. *(Cuba 2003) Sea $\triangle ABC$ isósceles con $AC = BC$. Sea D el punto medio de AB y E un punto arbitario en AB. Sea O el cricuncentro de $\triangle ACE$. Prueba que la perpendicular por D a OD, la perpendicular desde E a BC y la paralela a AC que pasa por B concurren.*

Problem 9. *Dado el triángulo acutángulo $\triangle ABC$. Denotemos por T al punto medio de BC. En la recta BC se toman los puntos M, N tales que $TM = TN$. Las rectas por M, N perpendiculares a CA, BA cortan AB, AC en F, E respectivamente. Sea L el punto medio de EF. Prueba que $LT \perp BC$.*

Problem 10. *(China South East 2011) Sea O el circuncentro del $\triangle ABC$, una recta que pasas por O intersecta a AB, AC en M, N , E es el punto medio de MC , F es el punto medio de NB. Prueba que $\angle FOE = \angle BAC$.*

Problem 11. *Sea $\triangle ABC$ con incentro I y circuncentro O . El incírculo toa al lado BC en D y las rectas AI , AO cortan de nuevo al circuncírculo en M , S respectivamente. Sean $X \in DM$, $Y \in AO$ puntos tales que $I \in XY$. Prueba que $IX = IY \iff OI \perp XY$.*

Problem 12. *(IMO Short List 2016) Sea* $\triangle ABC$ *con circuncírculo* Γ*, incentro* I *y sea* M *el punto medio de* $\overline{BC}$*. Los puntos* D*,* E*,* F *se toman en los lados* $\overline{BC}$*,* $\overline{CA}$*,* $\overline{AB}$ *tales que* $\overline{ID} \perp \overline{BC}$*,* $\overline{IE} \perp \overline{AI}$*, y* $\overline{IF} \perp \overline{AI}$*. Supongamos que el circuncírculo del* $\triangle AEF$ *intersecta* Γ *en* X *distinto de* A*. Prueba que las rectas* XD *y* AM *se cortan en* Γ*.*

Problem 13. *(XII Sharyguin Olympiad) Sean* O, I *el circuncentro y el incentro del* $\triangle ABC$*. La perpendicular por* I *to* OI *corta a* AB *y a la bisectriz exterior del* $\angle C$ *en los puntos* X, Y*, respectivamente. En qué razón divide* I *al segmento* XY*.*

Problem 14. *Sea* $\triangle ABC$ *con incentro* I *circuncentro* O*,* M *es el punto medio de* BC*.* AM *corta al incírculo en los puntos* K, L*. Las rectas paralelas a* BC *que pasan por* K, L *cortan al incírculo en los puntos*X, Y*, respectivamente.* AX *corta a* BC *en* P *y* AY *corta al circuncírculo en* D*.* DM, AM *cortan al circuncírculo en* E, F*, respectivamente. Prueba que* $\angle FPE = 180°$*.*

References

[1] `https://artofproblemsolving.com/community`

[2] `https://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/Haruki.shtml`

[3] `https://www.cut-the-knot.org/pythagoras/GeneralButterflyInPictures.shtml`

[4] Darij Grinberg, On cyclic quadrilaterals and the butterfly theorem.