Spiral Similarity y punto de Miquel.

Héctor Raúl Fernández Morales
hectorraulfm@gmail.com

mayo, 2021

Este documento está dedicado a los temas **Spiral Similarity** y **punto de Miquel** y a su aplicación en problemas geométricos de Olimpiadas de Matemáticas.

1 Spiral Similarity

La **Spiral Similarity**(a falta de un nombre convincente en castellano) es un moviemiento del plano, o sea, una transformación biyectiva del mismo. Consiste en la combinación de una rotación alrededor de un centro O y una dilatación. Hay dos enfoques fundamentales para la **ss** , uno es la definición analítica que pasa por los números complejos y el segundo es el puramente geométrico que no es más que semejanza a lo bestia. El primero sólo lo usaremos para la definición formal y la unicidad, en cambio el segundo entraña el verdadero potencial de esta transformación y es en la práctica el que nos ayuda a resolver problemas de olimpiadas.

Definition 1. *La expresión analítica que carateriza a la Spiral Similarity es*

$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto z_0 + \alpha(z - z_0). \end{aligned}$$

donde z_0 *es el centro de la spiral similarity,* $|\alpha|$ *es el factor de dilatación y* $\arg(\alpha)$ *es el ángulo de rotación.*

Lemma 1. *Dados* 4 *puntos* A, B, C *y* D *de modo tal que* $ACDB$ *no es un paralelogramo, entonces existe una única spiral similarity que envía* A *a* C *y* B *a* D.

Proof: Está claro que $T(a) = c$ y $T(b) = d$ implican que

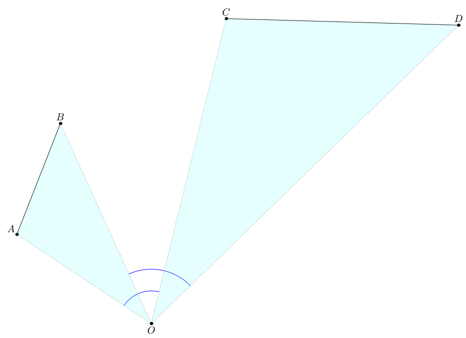
$$z_0 + \alpha(a - z_0) = c, \qquad z_0 + \alpha(b - z_0) = d.$$

Resolviendo tenemos que

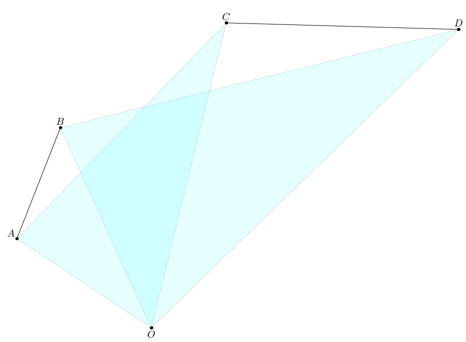
$$\alpha = \frac{c-d}{a-b}, \qquad z_o = \frac{ad - bc}{a - b - c + d}$$

Somo $ACDB$ nos es un paralelogramo entonces $a - b - c + d \neq 0$(Demuéstralo!!!) y entonces la solución del sistema anterior existe y es única. ∎

Hemos visto que siempre que $ABDC$ no sea un paralelogramo, entonces existe una **ss** que envía A a C y B a D. Además es fácil probar que $\triangle OAB \sim \triangle OCD$ y esta relación de semejanza es **equivalente** a la existencia de dicha **ss** .



Un detalle muy importante es que las **ss** vienen en pares, esto es, si existe una **ss** que A a C y B a D entonces existe otra **ss** que envía A a B y C a D y en este caso $\triangle OAC \sim \triangle OBD$



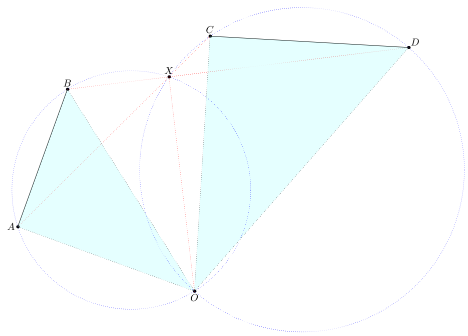
Lemma 2 (Centro de la spiral similarity)**.** *Dados* 4 *puntos* A, B, C *y* D *sea* X *la intersección de* AC *y* BD*. Si* (ABX) *y* (CDX) *se intersectan de nuevo en* O*, entonces* O *es el centro de la única spiral similarity que envía* A *a* C *y* B *a* D*.*

Proof: La demostración es exclusivamente trabajo con ángulos, concretamente

$$\angle BAO = \angle DXO = \angle DCO$$

y

$$\angle ABO = \angle AXO = \angle CDO$$



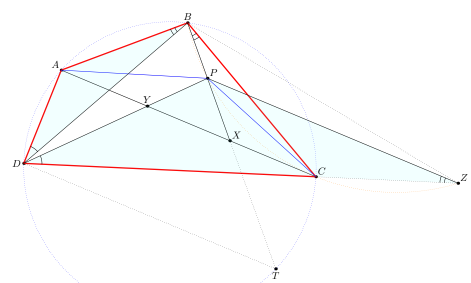
de donde $\triangle BAO \sim \triangle DCO$. ■

Problem 1 (IMO 2004)**.** *En un cuadrilátero convexo $ABCD$, la diagonal BD no es bisectriz de ninguno de los ángulos ABC y CDA. El punto P está en el interior de $ABCD$ y satisface*

$$\angle PBC = \angle DBA \quad \textit{and} \quad \angle PDC = \angle BDA.$$

Prueba que $ABCD$ es cíclico si y solo si $AP = CP$.

Sol: Sea $X = BP \cap AC$, $Y = DP \cap AC$, $Z \in DC$ tal que $BPCZ$ es cíclico y $T \in BP$ tal que $XT = DY$ y X está entre P y T.



($\Rightarrow$) Supongamos que $ABCD$ es cíclico.

$$\triangle BXC \sim \triangle BAD \Rightarrow \frac{XC}{AD} = \frac{BC}{BD}$$

$$\triangle ADY \sim \triangle BDC \Rightarrow \frac{AY}{BC} = \frac{AD}{BD}$$

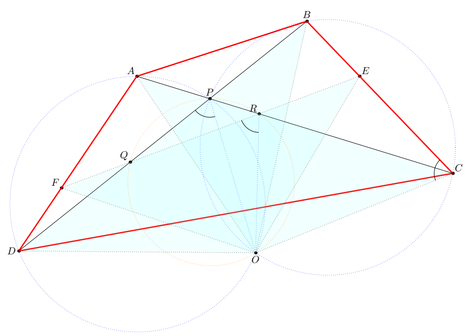
de donde $AY = XC$. También de las semejanzas anteriores ontenemos que $\angle PYX = \angle PXY$ y podemos concluir que $\triangle AYP = \triangle CXP$, y entonces $AP = CP$.

($\Leftarrow$) Supongamos $AP = CP$.
Veamos que $\angle PZD = \angle PBC = \angle ABD$ de donde $\triangle DPZ \sim \triangle DAB$ y tenemos

una **ss** centrada en D que lleva A a P y B a Z. También tenemos que $\triangle DAP \sim \triangle DBZ$, esto implica que $\angle APD = \angle BZD = \angle XPC$, de donde $\triangle PXY$ es isósceles y $XY \parallel DT$, además $\triangle DAP = \triangle TCP$ y $ACTD$ es un trapecio isósceles y por tanto cíclico.
Por otra parte, $\angle PTC = \angle PDA = \angle CDB$ lo que implica que $BCTD$ es cíclico y concluimos que $ABCTD$ también lo es. $\square$

Problem 2 (IMO 2005). *Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que $BC = DA$ y BC no es paralela a DA. Sean dos puntos variables E y F sobre los lados BC y DA respectivamente de modo que $BE = DF$. Las rectas AC y BD se cortan en P, las rectas BD y EF se cortan en Q y las rectas EF y AC se cortan en R. Prueba que los circuncírculos de los triángulos PQR, mientras E y F varían, tienen un punto común además de P.*

Sol: Sea $O = (ADP) \cap (BCP)$



Veamos que tenemos una **ss** centrada en O que envía el segmento DA al segmento BC. Dicha **ss** envía F a E de donde

$$\triangle ODB \sim \triangle OAC \sim \triangle OFE.$$

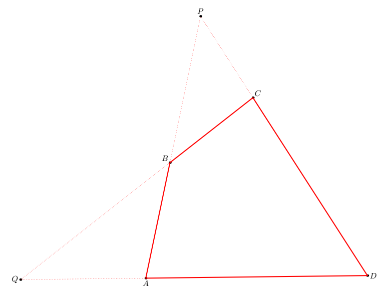
Tenemos entonces que $RECO$ y $PBCO$ son cíclicos lo que implica que

$$\angle QRO = \angle BCO = \angle QPO$$

que a su vez implica que $PROQ$ es cíclico, por tanto todas las circunferencias (PQR) pasan por el punto O que no depende de E y F. $\square$

2 Punto de Miquel

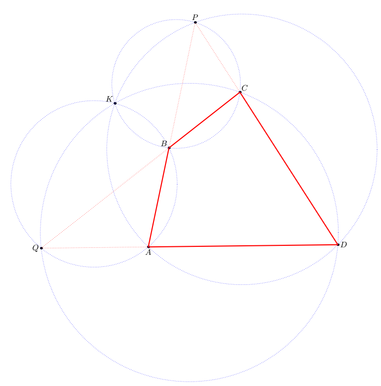
Primeramente vamos a introducir el concepto de **cuadrilátero completo**, este aparece cuando consideramos cuatro rectas donde no hay dos paralelas ni tres concurrentes como muestra la siguiente figura.



Los cuadriláteros completos los conocemos gracias al **teorema de Menelao** y son cruciales en geometría proyectiva.

Theorem 1 (Teorema de Miquel)**.** *Las cuatro circunferencias* $(QAB), (QCD), (PBC), (PAD)$ *concurren en el punto de Miquel* K*. Además* K *es el centro de la spiral similarity que envía* AB *a* DC *y de la que envía* AD *a* BC*.*

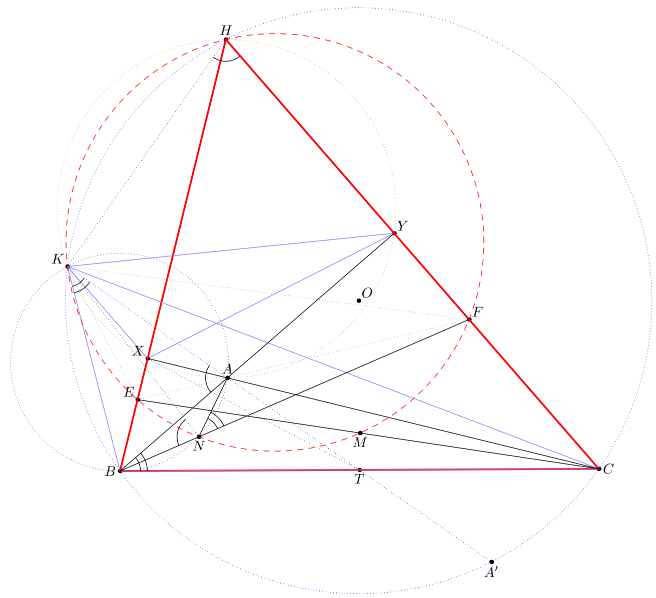
Proof:



La demostración de la concurrencia es simplemente trabajo con ángulos y la parte de las **ss** es consecuencia del lema 2. ∎

Problem 3 (EGMO 2021)**.** *Sea* ABC *un triángulo con ángulo obtuso en* A*. Sean* E *y* F *las intersecciones de la bisectriz exterior del* $\angle A$ *con las alturas del* $\triangle ABC$ *desde* B *y* C *respectivamente. Sean* M *y* N *puntos en los segmentos* EC *y* FB *respectivamente tal que* $\angle EMA = \angle BCA$ *y* $\angle ANF = \angle ABC$*. Prueba que los puntos* E, F, N, M *son concíclicos.*

Sol: Sea A' la antípoda de H en (HBC), BX y CY alturas del $\triangle ABC$, T el punto medio de BC y K el punto de miquel del cuadrilátero completo que determina $BXYC$.



Primeramente veamos que A es el ortocentro de BHC por tanto A', T, A son colineales, como $\angle AKH = 90$ tenemos que K pertenece también a esta recta.

Claim 1

$KHFE$ es cíclico.

Proof: Sabemos que hay una **ss** centrada en K que lleva BX a CY. Por el teorema de la bisectriz

$$\frac{XE}{EB} = \frac{XA}{AB} = \frac{AY}{AC} = \frac{YF}{FC}$$

de donde dicha **ss** lleva E a F lo que implica que

$$\angle EKF = \angle BKC = \angle BHC = \angle EHF$$

y ya tenemos probado el claim. ■

Claim 2

$KANB$ es cíclico.

Proof: Teniendo en cuenta que HA y HA' son isogonales

$$\angle ANF = \angle YBC = \angle YHA = \angle A'HB = \angle A'KB = \angle AKB$$

■

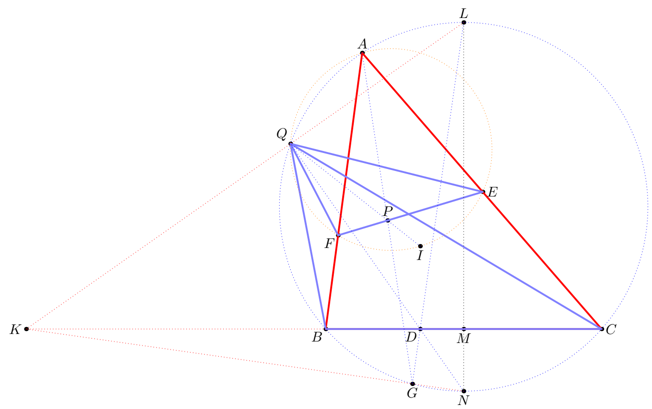
El problema concluye notando que

$$\angle KNB = \angle KAB = \angle KHY$$

de donde $N \in KHFE$. Análogamente $M \in KHFE$ y el problema está resuelto. $\square$

Problem 4 (USA TST 2021)**.** *Sea ABC un triángulo escaleno con incentro I. El incírculo de ABC toca a BC, CA, AB en los puntos D, E, F, respectivamente. Sea P el pie de la altura desde D a EF, y sea M el punto medio de BC. Los rayos AP y IP intersectan el circuncírculo de ABC de nuevo en G y Q, respectivamente. Prueba que el incentro de GQM coincide con D.*

Sol: Sea N y L los puntos medios de los arcos BC y BAC en (ABC). Sea $Q' = ND \cap (ABC)$.



Claim 3

Q' el punto de Miquel del cuadrilátero completo determinado por $BFEC$.

Proof: Sabemos que Q' es la imagen de D a través de la inversión centrada en N y de radio NI, de donde $\angle DIN = \angle NQ'I$, lo que implica que

$$\begin{aligned} 90 = \angle LQ'N &= \angle LQ'I + \angle IQ'N \\ &= \angle LQ'I + \angle DIN \\ &= \angle LQ'I + \angle ANL \\ &= \angle LQ'I + \angle AQ'L \\ &= \angle AQ'I \end{aligned}$$

de donde $Q' \in (AEF)$ y hemos probado el claim. $\blacksquare$

Claim 4

$Q' = Q$.

Proof: Basta probar que I, P, Q' son colineales. Veamos que $\triangle FPD \sim \triangle IDC$ y que $\triangle EPD \sim \triangle IDB$, de estas semejanzas es fácil obterner que

$$\frac{FP}{PE} = \frac{BD}{DC}. \tag{1}$$

Como Q' es el punto de Miquel sabemos que hay una **ss** centrada en Q' que manda BC a FE y de aquí deducimos que $QEIF \sim QCNB$. Usando el claim anterior y (1) tenemos que I, P, Q' son colineales de donde $Q' = Q$. ■

Claim 5

L, D, G son colineales.

Proof: $\triangle FAE \sim \triangle BLC$, combinando esto con (1) tenemos que $\angle FAP = \angle BLD$ de donde se deduce el resultado. ■

Claim 6

LQ, MD, NG concurren en K.

Proof: Ejes radicales en $(QLMD), (DMNG), (QLNG)$. ■

Finalmente es fácil ver que D es el ortocentro del $\triangle LKN$ de donde es el incentro de su triángulo órtico GQM. □

3 Lista de Problemas

Problem 1. *(China 1992) El cuadrilátero convexo* $ABCD$ *está inscrito en la circunferencia* ω *de centro* O*. Las diagonales* AC *y* BD *se cortan en* P*. Los circuncírculos de* ABP *y* CDP *se cortan en* Q*. Prueba quie* $\angle OQP = 90$*.*

Problem 2. *(IMO shortlist 2002) LaS circunferencias* S_1 *y* $S-2$ *se intersectan en* P *y* Q*. Puntos* A_1 *y* B_1 *son seleccionados en* S_1*. Las rectas* A_1P *y* B_1P *cortan a* S_2 *de nuevo en* A_2 *y* B_2 *respectivamentey las rectas* A_1B_1 *y* A_2B_2 *se cortan en* C*. Prueba que, mientras* A_1 *y* B_1 *varían, los cicuncentros de* $\triangle A_1A_2C$ *pertenecen a una circunferencia fija.*

Problem 3. *(USA TST 2006) En el triángulo acutángulo* ABC*, segmentos* AD, BE *y* CF *son las alturas y* H *es el ortocentro. La circunferencia* ω *de centro* O *pasa por* A *y* H *e intersecta* AB *y* AC *de nuevo en* Q *y* P *respectivamente. El circuncirculo del* $\triangle OPQ$ *es tangente al segmento* BC *en* R*. Prueba que* $\frac{CR}{BR} = \frac{ED}{FD}$*.*

Problem 4. *(USAMO 2013) En el triángulo* ABC*, puntos* P*,* Q*,* R *pertenecen a los lados* BC*,* CA*,* AB *respectivamente. Sean* ω_A*,* ω_B*,* ω_C *los circuncírculos de los triángulos* AQR*,* BRP*,* CPQ*, respectivamente. Dado que el segmento* AP *intersecta* ω_A*,* ω_B*,* ω_C *de nuevo en* X*,* Y*,* Z*, respectivamente, Prueba que* $\frac{YX}{XZ} = \frac{BP}{PC}$*.*

Problem 5. *(USAMO 2013) Sea* ABC *un triángulo. Encuentra todos los puntos* P *en el segmento* BC *que satisfacen la siguiente propiedad: Si* X *e* Y *son las intersecciones de la recta* PA *con las tangentes exteriores comunes a los circuncírculos de los triángulos* PAB *y* PAC*, entonces*

$$\left(\frac{PA}{XY}\right)^2 + \frac{PB \cdot PC}{AB \cdot AC} = 1.$$

Problem 6. *(International Zhautykov Olympiad 2011) Las diagonales de un cuadrilátero cíclico* $ABCD$ *se intersectan en* K*. Los puntos medios de las diagonales* AC *y* BD *son* M *y* N*, respectivamente. Los dircuncírculos de* $\triangle ADM$ *y* $\triangle BCM$ *se cortan en* M *y* L*. Prueba que* K, L, M *y* N *son concíclicos.*

Problem 7. *(International Zhautykov Olympiad 2013) Dado un trapecio* $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ *con* $\angle ABC > 90$*. El punto* M *es escogido en* AB*. Sean* O_1 *y* O_2 *los cicuncentros de los triángulos* MAD *y* MBC*, respectivamente. Los circuncírculos de* $\triangle MO_1D$ *y* $\triangle MO_2C$ *se cortan de nuevo en* N*. Prueba que la recta* O_1O_2 *pasa por* N*.*

Problem 8. *(International Zhautykov Olympiad 2014) Los puntos* M, N, K *pertenecen a los lados* BC, CA, AB *del triángulo* ABC*, respectivamente. El triángulo* MNK *se dice bonito si* $\angle BAC = \angle KMN$ *y* $\angle ABC = \angle KNM$*. Si en el triángulo* ABC *hay dos triángulos bonitos con un vértice común, prueba que el triángulo* ABC *es rectángulo.*

Problem 9. *(IGO 2015) Sea H el ortocentro del triángulo ABC. Sean l_1 y l_2 dos rectas que pasan por H tales que $l_1 \perp l_2$. Tenemos que $l_1 \cap BC = D$ y $l_1 \cap AB = Z$, además, $l_2 \cap BC = E$ y $l_2 \cap AC = X$. Sea Y tal que $YD \parallel AC$ y $YE \parallel AB$. Prueba que X, Y, Z son colineales.*

Problem 10. *(https://artofproblemsolving.com/community/c6h2328734p18668577) Dado el triángulo acutángulo ABC, $AB > AC$ con ortocentro H. La bisectriz externa del $\angle BHC$ corta AB, AC en D, E. Sean M, N los puntos medios de BC, DE respectivamente. La bisectriz interna del $\angle BHC$ corta BC, MN en P, Q respectivamente. Prueba que (ADE) es tangente a (MPQ).*

Problem 11. *(https://artofproblemsolving.com/community/c6h2251206p17457067) Sea el triángulo ABC con el punto D variando en el lado BC. Sean E, F las intersecciones de (ABD) y (ACD) con AC y AB respectivamente. El circulo centrado en I pasa por B y C y es tangente a (AEF) en T. Sea M el punto medio de BC, S la intersección de TM y EF. Prueba que $DS \perp BC$.*

References

[1] Yufei Zhao, Lemmas in euclidean geometry.

[2] Evan Chen, Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads.

[3] `https://artofproblemsolving.com/community`

[4] Stefan Lozanovski, A Beautiful Journey Through Olympiad Geometry.