Recta de Euler y una circuferencia muy pequeña.

Héctor Raúl Fernández Morales
hectorraulfm@gmail.com

Noviembre 26, 2020

Este documento está dedicado a demostrar los resultados básicos relativos a la recta de Euler y a la circunferencia de los nueve puntos.

1 Lema principal

Lemma 1. *Sea ABC un triángulo con ortocentro H, baricentro G y circuncentro O. Sean AD, BE y CF alturas de dicho triángulo, M y T los puntos medios de BC y AH respectivamente. Sea A' la antípoda de A en (ABC) y sea $H' = AD \cap (ABC)$. Entonces se tiene que:*

(i) *Las rectas que determinan AH y AO son isogonales con respecto al $\angle BAC$.*

(ii) *D es el punto medio de HH' y $H'A' \parallel BC$.*

(iii) *$\{H, A, B, C\}$ es el conjunto formado por el incentro y los excentros del triángulo órtico $\triangle DEF$.*

(iv) *$\overline{AH} = 2 \cdot \overline{OM}$.*

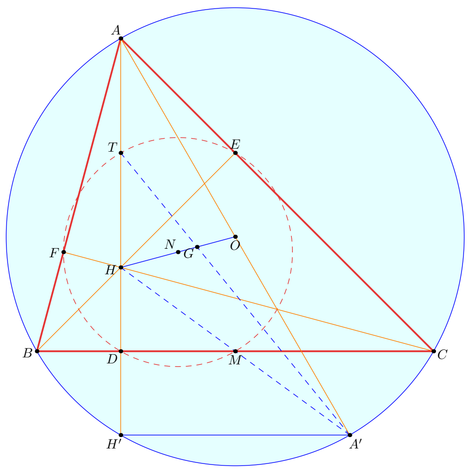
(v) *Los puntos A', M, H son colineales.*

(vi) *Los puntos O, G, H son colineales y determinan la recta de Euler.*

(vii) *Los puntos A', G, T son colineales.*

(viii) *El pentágono $FTEMD$ es cíclico y su circunferencia circunscrita Ω es la circunferencia de los nueve puntos.*

(ix) *El centro de Ω es el punto medio del segmento OH.*



Proof. (i) Sin pérdida de generalidad $AB \leq AC$. Ahora, $\angle OAC = \frac{180 - \angle AOC}{2} = 90 - \angle ABC = \angle BAD$.

(ii) $\angle DCF = \angle DAF = \angle H'CB$, entonces CD es bisectriz de $\angle H'CH$. Además, $CD \perp HH'$ de donde D es punto medio de HH'. Por otra parte, usando (i) tenemos que $\angle BAH' = \angle A'AC$ lo que implica que $H'A' \parallel BC$.

(iii) $\angle FDH = \angle HBF = \angle EBF = \angle ECF = \angle ECH = \angle EDH$ lo que implica que DH es bisectriz del $\angle EDF$. Análogamente para $\angle DEF$ y $\angle EFD$ y tenemos que H es el incentro del $\triangle DEF$. Ahora, $CD \perp HD$ implica que CD es bisectriz exterior del $\angle EDF$, análogamente CE es bisectriz exterior del $\angle DEF$ de donde se deduce que C es el $F-$excentro del $\triangle DEF$. Los otros dos puntos son análogos.

(iv) De (i) sabemos que $AO \perp EF$. Por otra parte T, M son los centros de las circunferencias que pasan por $AEHF$ y $BFEC$ respectivamente y EF es el segmento que determina el eje radical de dichas circunferencias, de donde $TM \perp EF$, entonces $AOMT$ es un paralelogramo y $OM = AT = AH/2$.

(v) De (iv) deducimos que OM es la paralela media del $\triangle AA'H$ relativa al lado AH, de donde A', M, H son colineales.

(vi) Sea $G' = AM \cap HO$. De v deducimos que G' es el baricentro del $\triangle AA'H$ de donde $G'M/AM = 1/3$ lo que implica que $G' = G$, de donde se tiene que O, G, H son colineales.

(vii) Consecuencia de que AT es mediana en el $\triangle AA'H$.

(viii) T es el circuncentro del $\triangle AFE$, de donde $\angle TEA = \frac{180 - \angle ATE}{2} = 90 - \angle AFE = 90 - \angle ACB$. Por otra parte M es el punto medio de la hipotenusa BC en el triángulo rectángulo BEC, entonces $\angle MEC = \angle ACB$. Combinando los dos resultados tenemos que $\angle TEM = 90$ análogamente $\angle TFM = 90$, y concluimos que $FTEMD$ está inscrito en la circunferencia Ω de diámetro TM. De manera análoga sos puntos medios de AC, AB, BH, CH también pertencen a Ω.

(ix) De $(viii)$ sabemos que el centro de Ω, N en la figura, es el punto medio de TM. De (iv) sabemos que $TOMH$ es un paralelogramo,de donde N es punto medio de HO.

$\square$

2 Lista de Problemas

Problem 1. *Sea ℓ una recta que pasa por el ortocentro H del $\triangle ABC$. Demuestra que las reflexiones de ℓ sobre los lados del $\triangle ABC$ concurren en un punto de (ABC).*

Problem 2. *Sean H y O el ortocentro y el circucentro del $\triangle ABC$, respectivamente. Prueba que $AH = AO$ si y solo si $\angle BAC = 60$.*

Problem 3. *En el triángulo acutángulo $\triangle ABC$, BH es La altura desde B. Los puntos D y E son los puntos medios de AB y AC respectivamente. Sea F la reflexión de H con respecto a ED. Prueba que el circuncentro O del $\triangle ABC$ pertenece a la recta BF.*

Problem 4. *Sea $\triangle ABC$ acutángulo, la circunferencia ω_1 centrada en O_1 intersecta los segmentos AB y AC en los puntos D y E respectivamente. Sea ω_2 la circunferencia circunscrita del $\triangle ADE$ con centro en O_2. Prueba que $\overline{O_1O_2} = R$ donde R es el circunradio del $\triangle ABC$.*

Problem 5. *Sea $\triangle ABC$ acutángulo tal que $\angle BAC = 60$. La recta de Euler de dicho triángulo intersect a AB y AC en los punto D y E respectivamente. Prueba que $\triangle ADE$ es equilátero.*

Problem 6. *Sea $\triangle ABC$ acutángulo con circuncírculo ω y sean O, H el circuncentro y el ortocentro de dicho triángulo. Sea A' donde la bisectriz de $\angle BAC$ intersecta ω. Si $\overline{A'H} = \overline{AH}$, encuentra la medida del $\angle BAC$.*

Problem 7. *Sea $\triangle ABC$ tal que $\overline{AB} \neq \overline{AC}$. Sea M el punto medio de BC, H el ortocentro, D el punto medio de AH y P el circuncentro del $\triangle HBC$. Prueba que $DAMP$ es un paralelogramo.*

Problem 8. *(APMO 2013.) Sea $\triangle ABC$ acutángulo con alturas AD, BE, y CF, y sea O su circuncentro. Prueba que los segmentos OA, OF, OB, OD, OC, OE dividen a $\triangle ABC$ en tres pares de triángulos que tienen igual area.*

Problem 9. *(EGMO 2017.) Sea $\triangle ABC$ acutángulo y no isósceles. Las reflexiones del baricentro G y el circuncentro O de $\triangle ABC$ sobre sus lados BC, CA, AB se denotan por G_1, G_2, G_3 y O_1, O_2, O_3, respectivamente. Prueba que los circuncírculos de los triángulos G_1G_2C, G_1G_3B, G_2G_3A, O_1O_2C, O_1O_3B, O_2O_3A y ABC tienen un punto en común.*

Problem 10. *(JBMO 2013.) Sea $\triangle ABC$ acutángulo con $AB < AC$ y sea O el centro de su circuncírculo ω. Sea D un punto en el segmento BC tal que $\angle BAD = \angle CAO$. Sea E el segundo punto de intersección de ω y la línea AD. Si M, N y P son los puntos medios de los segmentos BE, OD y AC, respectivamente, prueba que M, N y P son colineales.*

Problem 11. *(JBMO 2014.) Considera el triangle ABC acutángulo de área S. Sea $CD \perp AB$ ($D \in AB$), $DM \perp AC$ ($M \in AC$) y $DN \perp BC$ ($N \in BC$). Denotemos por H_1 y H_2 los ortocentros de los triángulos MNC y MND respectivamente. Encuentra el área del cuadrilátero AH_1BH_2 en términos de S.*

Problem 12. *En el triángulo ABC tal que $\overline{AB} \neq \overline{AC}$. El incírculo centrado en I toca los lados BC, CA y AB en los puntos D, E y F, respectivamente. Sean Y y Z las intersecciones de de línea parallela a BC que pasa por A con las líneas DF y DE, respectivamente. Sean M y N los puntos medios DY y DZ. Prueba que el cuadrilátero $IMAN$ es cíclico.*

Problem 13. *Sea AE diámetro en $\triangle ABC$. Sea H el ortocentro del $\triangle ABC$, EH corta (ABC) de nuevo en D. Prueba que la circunferencia de los nuevo puntos del $\triangle ABC$ pasa por el punto medio de HD. Generalización: La circunferencia de los nueve puntos pasa por el punto medio de cualquier segmento que une el ortocentro con un punto en el circuncírculo.*

Problem 14. *En $\triangle ABC$ sea ℓ la recta de Euler. Sea ℓ_a la reflexión de ℓ en BC y A' la proyección ortogonale de A en ℓ_a. Prueba que $\triangle NAA'$ es isósceles, donde N es el centro de la circunferencia de los nueve puntos.*

References

[1] A Beautiful Journey Through Olympiad Geo. Stefan Lozanovski.

[2] Sharygin Geometry Olympiad 2007-19.

[3] https://artofproblemsolving.com