Prueba 9.

Problem 1. *Dos circunferencias $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ se intersectan en los puntos M y N. Una tangente común toca a $\mathcal{C}_1$ en P y $\mathcal{C}_2$ en Q, siendo esta tangente más cercana a N que a M. La recta PN corta a la circunferencia $\mathcal{C}_2$ de nuevo en R. Prueba que la recta MQ es bisectriz del $\angle PMR$.*

Problem 2. *Las tangentes al circuncírculo del $\triangle ABC$ en B y C se cortan en D. El circuncírculo del $\triangle BCD$ corta las rectas AC y AB de nuevo en E y F respectivamente. Sea O el circuncentro del $\triangle ABC$. Prueba que $AO \perp EF$.*

Problem 3. *A convex hexagon $ABCDEF$ is such that*

$$AB = BC \quad CD = DE \quad EF = FA$$

and

$$\angle ABC = 2\angle AEC \quad \angle CDE = 2\angle CAE \quad \angle EFA = 2\angle ACE$$

Show that AD, CF and EB are concurrent.

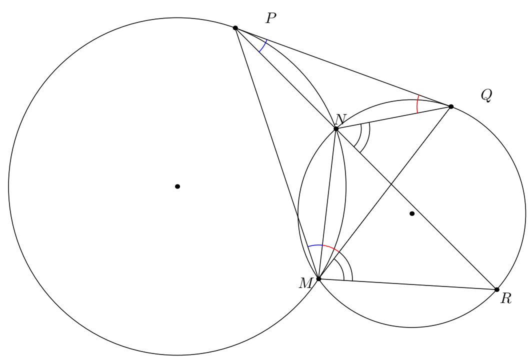
Soluciones

Solución 1

Sabemos que $\angle QMR = \angle QNR$ porque están inscritos en el arco QR. Además al ser PQ tangente a ambas circunferencias $\angle NQP = \angle NMQ$ y $\angle QPN = \angle NMP$, de donde

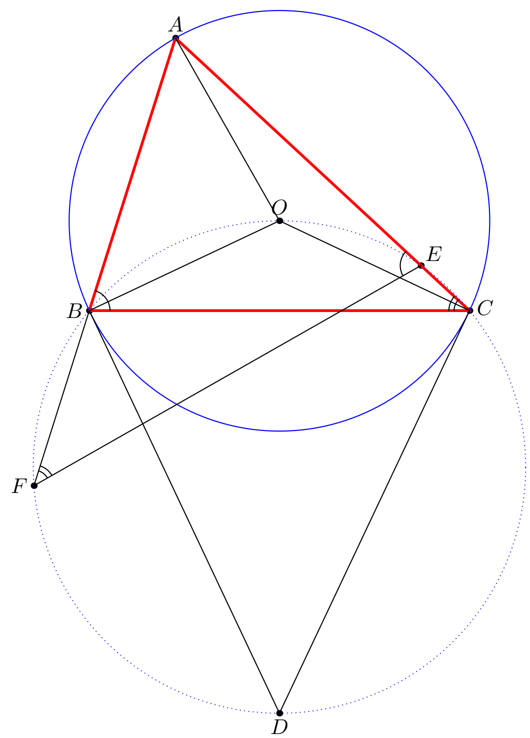
$$\angle QMR = \angle QNR = \angle NQP + \angle QPN = \angle NMQ + \angle NMP = \angle QMP$$

$\square$



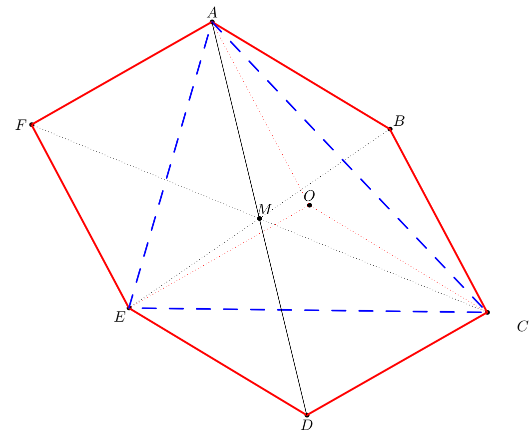
Solución 2

Al ser $OC \perp CD$ y $OB \perp BD$ el circuncírculo del $\triangle BCD$ pasa por O. Ahora, $\angle FBC = \angle FEC \Rightarrow \angle ABC = \angle AEF$ y $\angle EFB = \angle ACB$ de donde EF y BC son antiparalelas.
Tenemos entonces que $\triangle ABC \sim \triangle AEF$, como AO es isogonal a la altura relativa al vértice A en $\triangle ABC$ entonces AO es la recta que determina la altura relativa al vértice A en el $\triangle AEF$. $\square$



Solución 3

Sea O el circuncentro del $\triangle ACE$ y sea M el punto medio de AD. Lo primero es darnos cuenta que las condiciones dadas implican que $\triangle ABC = \triangle AOC$, $\triangle CDE = \triangle COE$ y $\triangle EFA = \triangle EOA$. Lo anterior implica que $ABCO$, $CDEO$ y $EFAO$ son rombos.
Ahora, $CD = EO = AF$ y $CD \parallel OE \parallel AF$ de donde $ACDF$ es un paralelogramo lo que implica que CF corta a AD en M.
Finalmente, $ED = OC = AB$ y $ED \parallel OC \parallel AB$ de donde $ABDE$ es un paralelogramo lo que implica que BE corta a AD en M. $\square$


A
B
F
M
O
E
C
D