Prueba 8.

Problem 1. *Encuentra todos los enteros positivos n tal que:*

$$\frac{n^3+3}{n^2+7}$$

es un entero positivo.

Problem 2. *Sean AB y CD diámetros perpendiculares de la circunferencia ω con centro en O. Considera el punto M en AB, distinto de A y B. La recta CM corta a ω de nuevo en N. La tangente a ω en N y la perpendicular a AM en M se intersectan en P. Prueba que $OP = CM$.*

Problem 3. *En una fila de niñas una niña se dice que está "bien formada" si no tiene a la vez a otra niña más pequeña delante y a otra niña más pequeña detrás. De cuántas formas se pueden poner 19 niñas(todas con diferentes estaturas) en una fila de modo tal que todas están "bien formadas".*

Soluciones

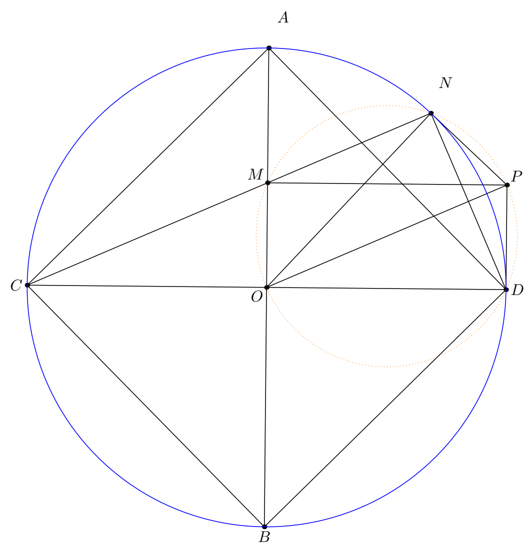
Solución 1

Veamos que
$$\frac{n^3+3}{n^2+7} = \frac{n^3+7n+3-7n}{n^2+7} = n - \frac{7n-3}{n^2+7}$$
Ahora, si $n > 6$ entonces $n^2+7 > 7n-3$ y la expresión anterior no sería entera, de donde $1 \le n \le 6$. Comprobando para dichos valores obtenemos las soluciones $n = 2$ y $n = 5$.

Solución 2

Claim: $OMNPD$ es cíclico.
Demostración: Veamos que $90 = \angle OMP = \angle ONP$, de donde $OMNP$ es cíclico. Además $90 = \angle MOD = \angle MND$, de donde $OMND$ es cíclico. El claim está probado porque tanto P como D pertenecen al circuncírculo del $\triangle MON$.

En $(OMNPD)$ tanto MD como OP son diámetros, de donde $MPDO$ es un rectángulo. Como consecuencia $CO = OD = MP$ que unido a $MP \parallel CO$ demuestran que $COPM$ es un paralelogramo de donde $OP = CM$.



Solución 3.1 Veamos que si tenemos dos niñas de estaturas $1, 2$ tenemos dos maneras de formarlas $\{(1,2),(2,1)\}$. Si tenemos tres niñas de estaturas $1, 2, 3$ tenemos 4 maneras $\{(1,2,3),(2,1,3),(3,1,2),(3,2,1)\}$.

Supongamos que para $n = k$ la cantidad de filas con todas las k niñas "bien formadas" es 2^{k-1}.

Sea $n = k + 1$. Veamos que la mayor de las niñas solo puede ir o al principio o al final, de lo contrario tendría niñas menores que ella a ambos lados. Si la mayor de las niñas es la primera las demás tienen exactamente 2^{k-1} maneras de ubicarse, lo mismo sucede si la mayor de las niñas es la última. De donde el total de formas es $2^{k-1} + 2^{k-1} = 2^k$.

Se ha probado por inducción que el resultado es 2^{18}.

Solución 3.2 Sea n arbitrario igual a la cantidad de niñas. Supongamos que la menor de las niñas se llama Ana y está en la posición k. Tenemos $\binom{n-1}{k-1}$ maneras de escoger las $k-1$ una niñas que van delante de Ana y esto ya fija a las que van detrás. Además para esta elección solo hay una manera de ubicarlas en la fila, las que van delante de Ana irían en orden decreciente y las que van detrás en orden creciente. De esta forma con Ana en la posición k tenemos $\binom{n-1}{k-1}$ maneras de formar a las niñas.
El total es entonces

$$\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \cdots \binom{n-1}{n-1} = (1+1)^{n-1} = 2^{n-1}.$$

Para $n = 19$ tenemos que el resultado es 2^{18}.