Prueba 7.

Problem 1. *Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico con circunferencia circunscrita centrada en O. Sean r y s las rectas obtenidas reflejando AB con respecto a la bisectriz interior de los $\angle CAD$ y $\angle CBD$, respectivamente. Si P es la intersección de r y s, prueba que OP es perpendicular a CD.*

Problem 2. *Sean a, b, c reales positivos. Probar que:*

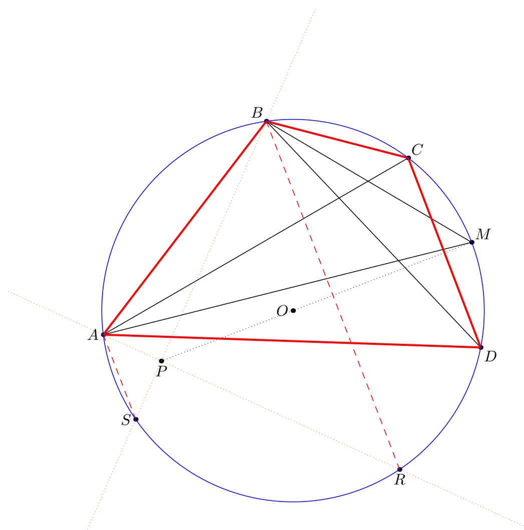
$$\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}$$

Problem 3. *Prueba que no existen enteros a y b tales que $a^5b + 3$ y $ab^5 + 3$ son ambos cubos perfectos.*

Soluciones

Solución 1

En la figura sea R, S los puntos de corte de r, s con $(ABCD)$ y sea M el punto medio del menor de los arcos CD.
Ahora, $\angle MAR = \angle MAB \Rightarrow \angle DAR = \angle CAB$ de donde $BC = DR$ que implica que $CD \parallel BR$. Similarmente $\angle ABD$ es igual al adyacente al $\angle CBS$, de donde $\angle ABD = \angle CDA \Rightarrow AD = CS \Rightarrow AS \parallel CD$.
Se concluye notando que como $ASRB$ es trapecio isósceles $PO \perp AS$ y como $AS \parallel CD$ tenemos que $PO \perp CD$.



Solución 2

Este problema es básicamente aplicar dos veces la famosa variación de la desigualdad de Cauchy-Schwartz .
La formulación clásica de CS es

$$(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) \geq (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)^2$$

Tomando $x_i = \sqrt{a_ib_i}$ e $y_i = \sqrt{\frac{a_i}{b_i}}$ tenemos la nueva formulación:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n}) \geq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2$$

Volviendo al problema, aplicando la segunda versión

$$\begin{aligned}(\frac{a^2}{b}\cdot\frac{a}{b}+\frac{b^2}{c}\cdot\frac{b}{c}+\frac{c^2}{a}\cdot\frac{c}{a})(\frac{\frac{a^2}{b}}{\frac{a}{b}}+\frac{\frac{a^2}{b}}{\frac{b}{c}}+\frac{\frac{c^2}{c}}{\frac{c}{a}}) &\geq (\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a})^2 \\ (\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2})(a+b+c) &\geq (\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a})^2\end{aligned} \tag{1}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}(a\cdot\frac{a}{b}+b\cdot\frac{b}{c}+c\cdot\frac{c}{a})(\frac{a}{\frac{a}{b}}+\frac{b}{\frac{b}{c}}+\frac{c}{\frac{c}{a}}) &\geq (a+b+c)^2 \\ (\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a})(a+b+c) &\geq (a+b+c)^2 \\ (\frac{b^2}{a}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}) &\geq (a+b+c)\end{aligned} \tag{2}$$

Multiplicando ambas desigualdades y simplificando obtenemos la desigualdad deseada.

Solución 3 Sean $m^3 = a^5b + 3$ y $n^3 = ab^5 + 3$. Sabemos que que los cubos perfectos dejan resto $0, 1, 8$ módulo 9 $(*)$.

Veamos que $3|a \Rightarrow m^3 \equiv 3 \pmod 9$, contradicción, de donde $3 \nmid a$. Análogamente $3 \nmid b$.

Por el teorema de Euler

$$\begin{aligned}a^{\varphi(9)} = a^6 &\equiv 1 \pmod 9 \\ b^{\varphi(9)} = b^6 &\equiv 1 \pmod 9\end{aligned} \tag{3}$$

Ahora $ab(a-b)(a+b)(a^2+b^2) = m^3 - n^3$, de donde $3|a-b$ o bien $3|a+b$, en cualquier caso $3|m^3 - n^3$ lo que implica (por $(*)$) que $9|m^3 - n^3$.

Esto último implica que tenemos dos casos

- $a^5b \equiv 5 \pmod 9$ y $ab^5 \equiv 5 \pmod 9$. De donde $a^6b^6 \equiv 25 \equiv 7 \pmod 9$, contradicción con (3).
- $a^5b \equiv 7 \pmod 9$ y $ab^5 \equiv 7 \pmod 9$. De donde $a^6b^6 \equiv 49 \equiv 4 \pmod 9$, contradicción con (3).