Prueba 6.

Problem 1. *En el triángulo acutángulo ABC con $AB < AC < BC$ sea ω su circuncirculo. Los segmentos BD y CE son diámetros de ω. La circunferencia $\omega_1 = c(A, AE)$ intersecta al segmento AC en K. La circunferencia $\omega_2 = (A, AD)$ intersecta BA en L (A está entre B y L). Prueba que las rectas EK y DL se intersectan en ω.*

Problem 2. *Supongamos que hay marcados 4951 puntos distintos en el plano de modo que no hay 4 de ellos colineales. Prueba que siempre es posible escoger 100 de estos puntos tales que no hay 3 de ellos colineales.*

Problem 3. *Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que*

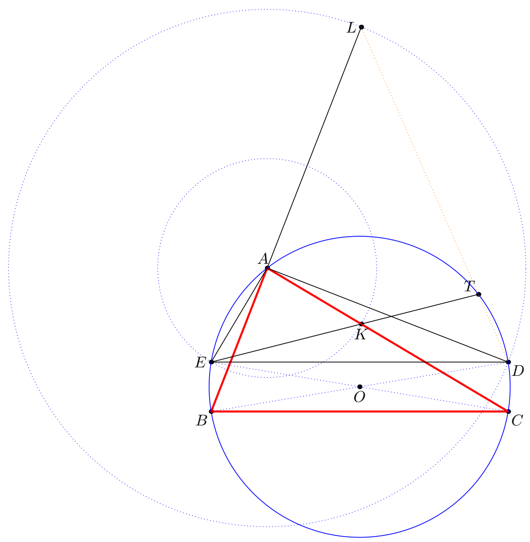
$$f(f(x)^2 + f(y)) = xf(x) + y$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

Soluciones

Solución 1

En la figura sea $T = EK \cap \omega$. Veamos que $\angle EAK = 90$ y $AE = AK$, de donde $45 = \angle AEK = \angle AET = \angle ADT$.
Por otra parte $\angle DAL = 90$ y $AD = AL$, de donde $45 = \angle ADL$. Combinando ambos tenemos que D, T, L son colineales. $\square$



Solución 2

Supongamos que el máximo número de puntos que podemos escoger tales que no hay 3 colineales es n. Sea S el cunjunto de estos números y R el conjunto de puntos restantes.Veamos que

- cada uno de los $(4951 - n)$ puntos de R pertenecen todos a una de las $\binom{n}{2}$ rectas formadas por puntos de S, porque si no S no sería maximal,
- además no puede haber dos de estos en la misma recta porque no hay 4 colineales.

Conclusión $4951 - n \leq \binom{n}{2} \Rightarrow 0 \leq n^2 + n - 9902 \Rightarrow 100 \leq n$. $\square$

Solución 3 Sea $P(x, y)$ la identidad dada.

- $P(0, 0) \Rightarrow f(f(0)^2 + f(0)) = 0$.
- $P(f(0)^2 + f(0), y) \Rightarrow f(f(y)) = y$, de donde f es una involución por tanto es biyectiva. Demuéstrenlo!!!
- $P(0, y) \Rightarrow f(f(0)^2 + f(y)) = y = f(f(y))$, usando inyectividad obtenemos que $f(0)^2 + f(y) = f(y)$ para todo y, de donde $f(0) = 0$.
- $P(x, 0) \Rightarrow f(f(x)^2) = xf(x)$.
- $P(f(x), 0) \Rightarrow f(f(f(x))^2) = f(x)f(f(x)) \Rightarrow f(x^2) = xf(x)$.
- Combinando las dos anteriores y usando inyectividad $f(x)^2 = x^2$.

En este punto vemos que $f(x) = x$ o $f(x) = -x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Supongamos que $f(a) = a$ y $f(b) = -b$.
Entonces $P(a, b) \Rightarrow f(a^2 - b) = a^2 + b$, hay dos posibilidades para $f(a^2 - b)$ o es $a^2 - b$ o $-a^2 + b$ en ambos casos llegamos a contradicción, de donde las soluciones son $f(x) = x$ y $f(x) = -x$ $x \in \mathbb{R}$. Queda un paso final que es comprobar que ambas funciones cumplen la identidad, lo cual es trivial.