Prueba 5.

Problem 1. *Considera* 51 *puntos en el interior de un cuadrado unidad. Prueba que es posible cubrir 3 de ellos con un círculo de radio* $1/7$.

Problem 2. *Encuentra* 26 *elementos del conjunto* $\{1, 2, 3, ..., 40\}$ *tal que el producto de dos cualesquiera de ellos nunca es cuadrado perfecto. Prueba que no podemos encontrar* 27 *elementos con esta propiedad.*

Problem 3. *Sea* ABC *un triángulo, y sea* M *el punto medio de* BC. *Sean* I_b *e* I_c *los incentros de* $\triangle AMB$ *y* $\triangle AMC$. *Prueba que el segundo punto de intersección de los circuncirculos de* $\triangle ABI_b$ *y* $\triangle ACI_c$ *distinto de* A *pertenece a la recta* AM.

Soluciones

Solución 1

Dividimos el cuadrado en 25 cuadrados iguales de lado $\frac{1}{5}$. Por pricipio del palomar(Dirichlet) existe un cuadradito con no menos de 3 puntos en el interior!!!.
Ahora, por Pitágoras el radio de la circunferencia circunscrita a dicho cuadradito es $\frac{\sqrt{2}}{10} < \frac{1}{7}$. $\square$

Solución 2

La idea es agrupar los números en conjuntos tales que dos cualesquiera multipliquen cuadrado perfecto,

$$L = \{\{1, 4, 9, 16, 25, 36\}, \{2, 8, 18, 32\}, \{3, 12, 27\}, \{5, 20\}, \{6, 24\}, \{7, 28\}, \{10, 40\}\}$$

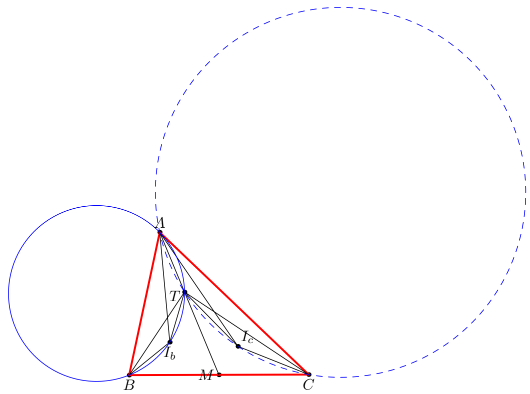
Los números restantes son

$$S = \{11, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 26, 29, 30, 31, 33, 34, 35, 37, 38, 39\}.$$

- Podemos escoger S más un elemento de cada conjunto de la lista L para tener 26 números con la propiedad deseada.
- En cualquier conjunto de 27 elementos existe al menos un conjunto de la lista L que aporta al menos 2 elementos de donde no se cumpliría la propiedad.

Nota: Podemos definir la relación xRy si y solo si xy es cuadrado perfecto. Es fácil probar que R es una relación de equivalencia por tanto podemos particionar $\mathbb{Z}$ y cualquier subconjunto de este en cojuntos tales que dos cualesquiera de sus elementos multipliquen cuadrado perfecto y además ningún producto de elementos de conjuntos distintos es cuadrado perfecto.

Solución 3 En la figura sea $T = AM \cap (ABI_b)$.



Es obvio que el siguiente claim demuestra el resultado deseado.

Claim: ATI_cC es cíclico.
Demostración: Como ATI_cC es cíclico, tenemos que $\angle I_bTM = \angle I_bBA = \angle I_bBC$. Además I_b es el punto medio del arco BT, de donde $\angle I_bBT = \angle I_bTB$. COmbinando ambos obtenemos que $\angle BTM = \angle TBM$, de donde $MT = MB = MC$, lo que implica que $\angle BTC = 90$.
Ahora,

$$\begin{aligned}\angle CTA = 180 - \angle MTC &= 180 - \angle MCT = 180 - (90 - \angle MBT) \\ &= 90 + \angle MBT \qquad (1) \\ &= 90 + \angle B/2 + \angle A/4\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\angle CI_cA = 180 - (\angle I_cAC + \angle I_cCA) = 180 - \angle C/2 - \angle A/4 \qquad (2)$$

Restando (1) y (2),

$$\angle CI_cA - \angle CTA = 90 - \angle C/2 - \angle B/2 - \angle A/2 = 0$$

de donde $\angle CI_cA = \angle CTA$. $\square$