Prueba 4.

Problem 1. *En un tablero de damas (8 x 8), colocamos las 24 fichas del juego de modo que llenen las 3 filas de arriba. Podemos cambiar la posición de las fichas según el siguiente criterio: una ficha puede saltar por encima de otra a un hueco libre, ya sea horizontal (a izquierda o derecha), vertical (hacia arriba o hacia abajo) o diagonalmente. ¿Podemos lograr colocar todas las fichas en las 3 filas de abajo?*

Problem 2. *Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes enteros. Demostrar que si existe un entero k tal que ninguno de los enteros*

$$P(0), P(1), P(2), \ldots P(k-1)$$

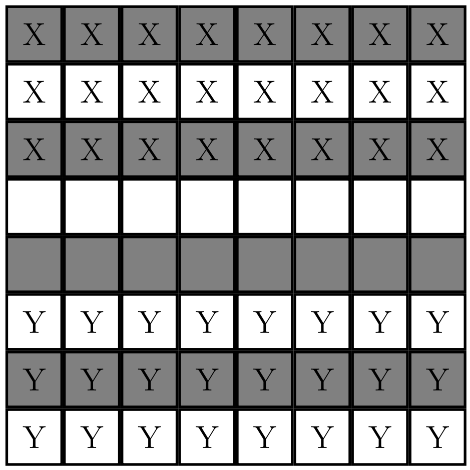
es divisible por k, entonces $P(x)$ no tiene raíces enteras.

Problem 3. *Ensartamos $2n$ bolas blancas y $2n$ bolas negras formando una cadena abierta. Demuestra que, se haga en el orden que se haga, siempre es posible cortar un segmento de cadena exactamente con n bolas blancas y n bolas negras.*

Soluciones

Solución 1

Coloreamos alternadamente las columnas, como muestra la figura,



vemos que despues de cualquiera de los movimientos válidos las fichas no cambian a casillas de color contrario!!!

De esta forma es imposible que las 16 fichas iniciales(X) ubicadas en casillas negras terminen en una franja(Y) que solo contiene 8 casillas negras.

Solución 2

Supongamos que:

i) ninguno de los enteros $\{P(0), P(1), P(2), \ldots P(k-1)\}$ es divisible por k y que

ii) l es raiz entera de $P(x)$

Sea $l = mk + r$ donde $m, k, r \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq r \leq k-1$.
Como l es raiz, tenemos que $P(x) = (x-l)Q(x) = (x-mk-r)Q(X)$ donde Q es un polinomio con coeficientes enteros. Evaluando en r tenemos que

$P(r) = -mkQ(r)$ que es divisible por k lo que contradice i), de donde si i) es verdadero ii) es falso. $\square$

Solución 3

Consideremos la función $f : \{n, n+1, \ldots, 2n\} \to \mathbb{Z}$ tal que $f(k)$ es igual a las diferencia entre bolas negras y blancas en el tramo que va desde la bola $(k-n+1)$ a la bola k.

Es fácil ver que $f(n)$ sólo toma valores pares, ya que si dos cantidades suman $2n$ su diferencia es par.

Supongamos que en el primer tramo de $2n$ bolas hay x bolas negras y $2n-x$ bolas blancas, esto implica que en el último tramo hay $2n-x$ bolas negras y x bolas blancas, esto implica que

$$f(n) = x - (2n-x) = (2x-2n) = -(2n-2x) = -((2n-x)-x) = -f(2n) \tag{1}$$

De donde si $f(n) = l$, entonces $f(2n) = -l$.
Ahora, $f(i+1)$ solo tiene trés posibilidades

- $f(i+1) = f(i)$ si la bola que sale del tramo es del mismo color de la que entra,
- $f(i+1) = f(i)+2$ si la bola que sale del tramo es blanca y la que entra es negra,
- $f(i+1) = f(i)-2$ si la bola que sale del tramo es negra y la que entra es blanca.

De esta forma $f(i)$ a medida que incrementamos i o se queda fija, o avanza al número par siguiente o retrocede al número par anterior, de donde no puede "saltarse" ningun número par, por tanto si empezó en k y terminó en $-k$, en algún momento fue 0. $\square$