Prueba 3.

Problem 1. *En el $\triangle ABC$ acutángulo se tiene que $AB < AC$. Sea M el punto medio de BC. Sean D, E las proyecciones de M en AB, AC respectivamente. Sea X la intersección de MD y la perpendicular a BC en B y sea Y la intersección de ME y la perpendicular a BC en C.*

a) Prueba que $DEYX$ es cíclico.

b) Prueba que $YX \perp AM$.

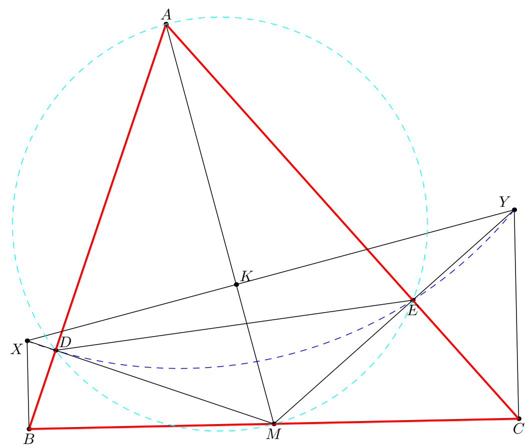
Hint: potencia de puntos.

Problem 2. *El punto A se encuentra en el exterior de la circunferencia Γ de centro O. Los puntos de tangencia desde A a Γ son B y C. Sea BD diámetro de Γ. Las rectas CD y AB se cortan en E y las rectas AD y OE se cortan en F. Calcula $|AF|/|FD|$.* ***Hint: Menelao.***

Problem 3. *En el $\triangle ABC$ acutángulo se tiene que $AB < AC$. Sea O el circuncentro del triángulo y sean D, E, F lo puntos medios de BC, CA, AB respectivamente. Sea P la intersección de la circunferencia de diámetro AB y la recta DF, con P en el mismo lado que C respecto a la recta AB. Sea Q la intersección de la circunferencia de diámetro AC y la recta DE, con Q en el mismo lado que B respecto a la recta AC. Sea $PQ \cap BC = R$, y la recta que pasa por R y es perpendicular a BC corta a AO en X. Prueba que $AX = XR$.* ***Hint:*** P ***y*** Q ***pertenecen a un recta importante.***

Soluciones

Solución 1



Sea $K = XY \cap AM$.
$a)$ Como $\triangle XBM$ y $\triangle YCM$ son rectángulos tenemos que

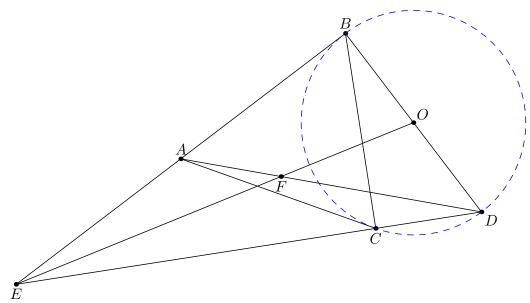
$$MD \cdot MX = MB^2 = MC^2 = ME \cdot MY$$

y por potencia de puntos $XDEY$ es cíclico.
$b)$ El cuadrilátero $AEMD$ es cíclico porque tiene un par de ángulos opuestos rectos. Entonces,

$$\angle DAK = \angle DAM = \angle DEM \underbrace{=}_{a)} \angle DXY = \angle DXK$$

De donde $XDKA$ es cíclico lo que implica que $\angle XKA = \angle XDA = 90$.

Solución 2

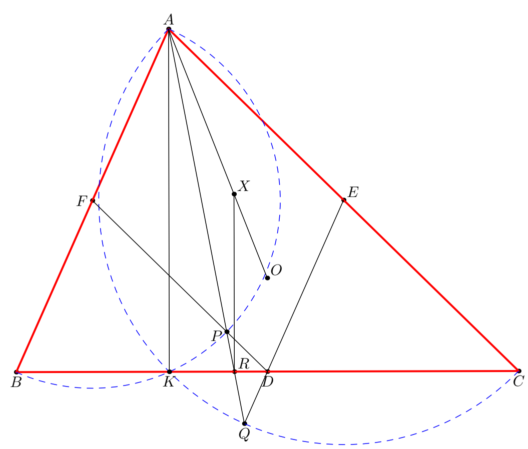


Como $\triangle BCE$ es recto en C y $AB = AC$ tenemos que A es el punto medio de BE.
Ahora usando teorema de Menelao tenemos que

$$\frac{DO}{OB} \cdot \frac{AF}{FD} \cdot \frac{BE}{EA} = 1$$

como $DO = OB$, tenemos que $\frac{AF}{FD} = \frac{EA}{BE} = \frac{1}{2}$.

Solución 3



Sea K el pie de la altura desde A, obviamente las circunferencias de diámetro AB y AC se cortan en A y K.
Ahora, $\triangle BPA$ es recto en P y F es punto medio de AB, lo que implica que $\angle FPA = \angle FAP$ $(*)$. Por otra parte $FD \parallel AC$ lo que implica que $\angle FPA = \angle PAC$ $(*)$. Combinando $(*)$ y $(**)$ tenemos que AP biseca el $\angle BAC$, análogamente AQ biseca el $\angle BAC$, de donde tanto P como Q están en la bisectriz de $\angle BAC$.

Recordemos que AO y AK son isogonales respecto al $\angle BAC$, lo que implica que son simétricas respecto a la bisectriz AR, además $AK \parallel XR$, de donde

$$\angle XAR = \angle RAK = \angle ARX$$

concluyendo que $\triangle XAR$ es isósceles de base AR.