# Prueba 31.

**Problem 1** (IMO 2006)**.** *Determina todos los pares* $(x, y)$ *de enteros tales que*

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

**Problem 2** (IMO 2003)**.** *Sea* $ABCD$ *un cuadrilátero cíclico. Sean* $P$*,* $Q$*,* $R$ *los pies de las perpendiculates desde de* $D$ *a las rectas* $BC$*,* $CA$*,* $AB$*, respectivamente. Prueba que* $PQ = QR$ *si y solo si las bisectrices de* $\angle ABC$ *y* $\angle ADC$ *concurren en un punto de la recta* $AC$*.*

**Problem 3** (IMO 2007)**.** *Lo números reales* $a_1$*,* $a_2$*, …,* $a_n$ *son dados. Para cada* $i$*,* $(1 \leq i \leq n)$*, se define*

$$d_i = \max\{a_j \mid 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j \mid i \leq j \leq n\}$$

*y sea* $d = \max\{d_i \mid 1 \leq i \leq n\}$*.*

*(a) Demostrar que para cualesquiera números reales* $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$*,*

$$\max\{|x_i - a_i| \mid 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}. \qquad (*)$$

*(b) Demostrar que existen números reales* $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ *para los cuales se cumple la igualdad en (*).*

# Soluciones

### Solución 1

Si $x \leq -2$ entonces $2^x + 2^{2x+1}$ no es entero.
Si $x = -1$ entonces $y^2 = 2$ contradicción.
Si $x = 0$ entonces $y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$.
Si $x = 1$ entonces $y^2 = 11$ contradicción.
Si $x \geq 2$ entonces $|y| > 2$.

Asumiendo que $y \geq 3$, tenemos

$$2^x(2^{x+1} + 1) = (y-1)(y+1).$$

Como $\gcd(y-1, y+1) = 2$ hay dos casos.

**Caso 1:** $2^{x-1}|y-1$. Tenemos que

$$(2 \cdot 2^{x-1})(2 \cdot 2^{x-1} + 2) < 2^x(2^{x+1} + 1) < (3 \cdot 2^{x-1})(3 \cdot 2^{x-1} + 2)$$

de donde $2 \cdot 2^{x-1} < y - 1 < 3 \cdot 2^{x-1}$ como $2^{x-1}|y-1$. Contradicción.

**Caso 2:** $2^{x-1}|y+1$. Tenemos que

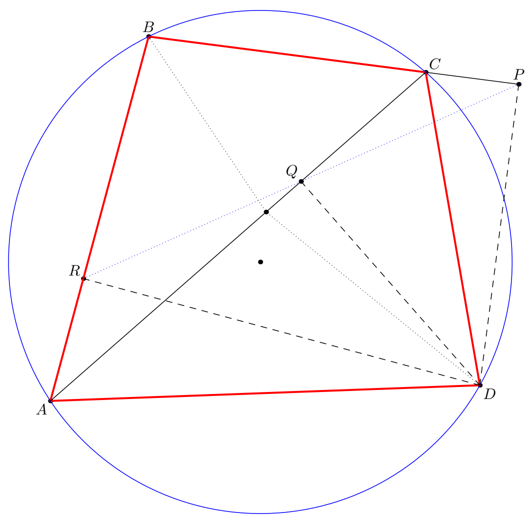
$$(2 \cdot 2^{x-1})(2 \cdot 2^{x-1} - 2) < 2^x(2^{x+1} + 1) < (4 \cdot 2^{x-1})(4 \cdot 2^{x-1} - 2)$$

de donde $2 \cdot 2^{x-1} < y + 1 < 4 \cdot 2^{x-1}$ como $2^{x-1}|y+1$ entonces $y + 1 = 3 \cdot 2^{x-1}$. Ahora

$$2^x(2^{x+1} + 1) = (3 \cdot 2^{x-1})(3 \cdot 2^{x-1} - 2) \Rightarrow x = 4 \Rightarrow y = 23.$$

Soluciones : $\boxed{(x, y) \equiv (0, \pm 2), (4, \pm 23)}$ $\square$

### Solución 2




- $P, Q, R$ están alineados porque determinan la recta de Simson de $D$ en el cuadrilátero cíclico $ABCD$.

- Por Menelao en $\triangle PBR$ tenemos que
$$\frac{PQ}{QR} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{PC}{AR}$$

- usando que $RQDA$ y $CPDQ$ son cíclicos es fácil comprobar $\triangle PCD \sim \triangle RAD$, de donde
$$\frac{PC}{AR} = \frac{DC}{DA}$$

- combinando los anteriores tenemos que
$$\frac{PQ}{QR} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{DC}{DA}$$
de donde $PQ = QR$ si y solo si $\frac{AB}{BC} = \frac{DA}{DC}$ y por el teorema de la bisectriz esto solo sucede cuando y solo cuando las bisectrices de $\angle ABC$ y $\angle CDA$ se cortan sobre $AC$.

$\square$

**Solución 3**

$(a)$ Supongamos que $d = d_m$ para cierto índice $m$, y sean $k, l$ los indices tales que $k \leq m \leq l$ y $d_m = a_k - a_l$. Veamos que

$$a_k - a_l \leq (a_k - x_k) + (x_l - a_l)$$

de donde al menos uno de los dos números $(a_k - x_k)$ y $(x_l - a_l)$ tiene que ser mayor o igual que $\frac{d}{2}$. El resultado es ahora evidente.
$(b)$ Sean $M_i = \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\}$ y $m_i = \min\{a_j : i \leq j \leq n\}$. Sea $x_i = \frac{m_i + M_i}{2}$.
Claramente $m_i \leq a \leq M_i$ y $(m_i)$, $(M_i)$ son no decrecientes. Además

$$-\frac{d_i}{2} \leq \frac{m_i - M_i}{2} = x_i - M_i \leq x_i - a_i.$$

De manera similar $x_i - a_i \leq \frac{d_i}{2}$, de donde $\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \leq \max\{\frac{d_i}{2} \leq i \leq n\}$ y entonces la igualdad deseada se cumple para la sucesión $(x_i)$. $\square$