Prueba 30.

Problem 1 (Ucrania tst 2005)**.** *Dos circunferencias centradas en* O_1 *y* O_2 *se intersectan en* A *y* B*. La circunferencia que pasa por* A, O_1, O_2 *corta a dichas circunferencias en* M *y* N*. Prueba que* AB *es bisctriz del* $\angle MAN$*.*

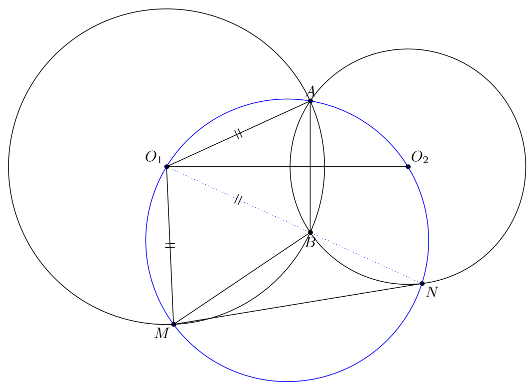
Problem 2 (Clásico)**.** *Un tablero de* 6×6 *es cubierto, sin solapamiento, con fichas de* 2×1*. Prueba que podemos cortar el tablero en* 2*, a través de alguna de sus líneas horizontales o verticales, de modo tal que dicho corte no atraviese ninguna de las fichas.*

Problem 3 (Olympiad Inequalities, Thomas Mildorf)**.** *Sean* a, b, c *reales positivos. Prueba que*

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \geq \frac{3}{1+abc}$$

Soluciones

Solución 1



- Veamos que como O_1O_2 es la mediatriz de AB, entonces $\angle AO_1O_2 = \angle BO_1O_2$ y como los arcos AO_2 y O_2N son iguales los puntos O_1, B, N son colineales.

- Como $O_1A = O_1B = O_1M$ entonces por el lema del incentro B es el incentro de $\triangle AMN$ y ya se deduce el resultado.

$\square$

Solución 2

Claim: Ninguna de las 5 líneś verticales puede atravesar un número impar de fichas.
Demostración: Sean v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 dichas líneas.
Supongamos que v_1 atraviesa un número impar de fichas, esto implica que hay un número impar de casillas en la primera columna cubiertas por fichas en posición vertical, lo cual es imposible.
Supongamos ahora que v_2 atraviesa un número impar de casillas, esto implica que:

- de las casillas de la segunda columna un número impar estás cubiertas por fichas atravesadas por v_2,

- de las restantes casillas de la segunda columna (un número impar), un número par están cubiertas por fichas verticales, por tanto un número impar de fichas cubren una casilla de la segunda columna y una de la primera.

Estos dos hechos implica que v_1 atraviesa un número impar de fichas!!! Contradicción.
De manera análoga se demuestra que si v_k atraviesa un número impar, entonces v_{k-1} también. Como v_1 atraviesa a un número par tenemos que todas las líneas verticales atraviesan un número par de fichas y el claim queda probado.

Volviendo al problema. El claim es válido también para las líneas horizontales. Supongamos que no podemos realizar el corte deseado, entonces tenemos que cada una de las 10 líneas posibles atraviesa como mínimo 2 fichas. Como cada ficha puede ser atravesada por una única línea tenemos que 10×2 es menor o igual que la cantidad de fichas que es 18, contradicción!!! $\square$

Solución 3

Multiplicando por $1 + abc$ y sumando 3 en ambos miembros llegamos que la desigualdad es equivalente a

$$\frac{1+a+ab+abc}{a(1+b)} + \frac{1+b+bc+abc}{b(1+c)} + \frac{1+c+ca+abc}{c(1+a)} \geq 6$$

que a su vez es equivalente a

$$\frac{1+a}{a(1+b)} + \frac{b(1+c)}{a(1+b)} + \frac{1+b}{b(1+c)} + \frac{c(1+a)}{b(1+c)} + \frac{1+c}{c(1+a)} + \frac{a(1+b)}{c(1+a)} \geq 6$$

que es verdadera por $AM - GM$. $\square$