Prueba 2.

Problem 1. *Sea $\triangle ABC$ acutángulo con $AB < AC$ y sea O el centro del circuncirculo ω. Sea D un punto en la recta determinada por BC tal que $\angle BAD = \angle CAO$. Sea E el segundo punto de intersección de ω y la recta AD. Si M, N y P son los puntos medios de los segmentos BE, OD and AC, respectivamente, prueba que M, N y P son colineales.*

Problem 2. *Sean p y n números naturales tales que p es primo y $1 + np$ es cuadrado perfecto. Prueba que el número $n + 1$ es suma de p cuadrados perfectos.*

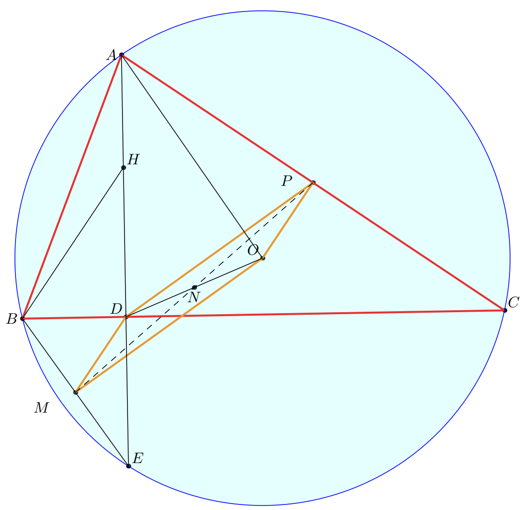
Problem 3. *El polinomio con coeficientes reales no negativos*

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + 1$$

tiene n raices reales. Prueba que $P(2) \geq 3^n$.

Soluciones

Solución 1



En la figura sea H el ortocentro de $\triangle ABC$.
Lo primero es notar que $\angle BAD = \angle CAO$ implica automáicamente que AD es altura(demuéstrenlo!!!), recordemos del video de la recta de euler que AO y AH son isogonales.
Del propio video sabemos además que $DE = DH$ (demuéstrenlo!!!).
MD es paralela media del $\triangle BHE$ de donde $MD = BH/2$.
Del video sabemos que $OP = BH/2$(Esto es básico y tenemos que asimilarlo!!!)
Les animo a concluir que $MOPD$ es un paralelogramo de donde MP corta a OD en el punto medio que es N, y el problema está terminado.

Solución 2

Sea $np + 1 = k^2$ $(*)$ esto implica que $np = k^2 - 1 = (k-1)(k+1)$, de donde $p|k-1$ o $p|k+1$.

Caso 1: $p|k-1 \Rightarrow pl = k-1 \Rightarrow pl+1 = k$, sustituyendo en $(*)$,

$$np + 1 = (pl+1)^2 = p^2l^2 + 2pl + 1 \Rightarrow n = pl^2 + 2l$$

de donde,

$$n+1 = pl^2 + 2l + 1 = \underbrace{l^2 + \cdots l^2}_{p-1\ veces} + (l^2 + 2l + 1) = \underbrace{l^2 + \cdots l^2}_{p-1\ veces} + (l+1)^2$$

y $n+1$ es suma de p cuadrados perfectos.

Caso 2: $p|k+1 \Rightarrow pl = k+1 \Rightarrow pl - 1 = k$, sustituyendo en $(*)$,

$$np + 1 = (pl-1)^2 = p^2l^2 - 2pl + 1 \Rightarrow n = pl^2 - 2l$$

de donde,

$$n+1 = pl^2 - 2l + 1 = \underbrace{l^2 + \cdots l^2}_{p-1\ veces} + (l^2 - 2l + 1) = \underbrace{l^2 + \cdots l^2}_{p-1\ veces} + (l-1)^2$$

y $n+1$ es suma de p cuadrados perfectos.

Solución 3 Lo primero es notar que al ser todos los coeficientes no negativos TODAS las raíces son negativas.(Podría ser alguna positiva??).

Sean $-r_1, -r_2, \cdots - r_n$ dichas raíces, donde $r_i > 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces $P(x) = (x+r_1)(x+r_2)\ldots(x+r_n)$ y

$$\begin{aligned} p(2) &= (2+r_1)(2+r_2)\ldots(2+r_n) \\ &= (1+1+r_1)(1+1+r_2)\ldots(1+1+r_n) \\ &\geq 3\sqrt[3]{r_1}3\sqrt[3]{r_2}\ldots3\sqrt[3]{r_n} \qquad (1) \\ &= 3^n\sqrt[3]{r_1r_2\ldots r_n} \\ &= 3^n \end{aligned}$$

hemos usado AM-GM y que el producto de los r_i es 1.