Prueba 29.

Problem 1 (Checa-Eslovaca 2010)**.** *Determina los pares de enteros* (a, b) *para los que se cumple que* $4^a + 4a^2 + 4 = b^2$ *.*

Problem 2 (Hong Kong 2000)**.** *Sea* O *el circuncentro del* $\triangle ABC$ *con* $AB > AC > BC$*. Sea* D *en el menor de los arcos* BC *del circuncírculo de* $\triangle ABC$ *y sean* E *y* F *puntos en* AD *tal que* $AB \perp OE$ *y* $AC \perp OF$*. Las rectas* BE *y* CF *se cortan en* P*. Prueba que si* $PB = PC + PO$*, entonces* $\angle BAC = 30°$*.*

Problem 3 (Polonia 2001)**.** *Demuestra la siguiente desigualdad*

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + ... + nx_n \leq \frac{n(n-1)}{2} + x_1 + x_2^2 + x_3^3 + ... + x_n^n$$

donde $x_i > 0$ *para todo* $1 \leq i \leq n$*.*

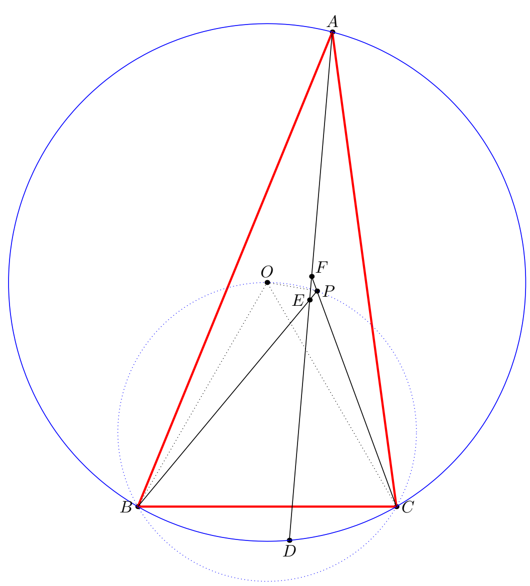
Soluciones

Solución 1

- Veamos que a tiene que ser positivo.
- $2|b$.
- $b^2 > 4^a \implies |b| \geq 2^a + 2$.
- De lo anterior $4^a + 4a^2 + 4 \geq 4^a + 2^{a+2} + 4 \implies 4 \geq a$
- Analizando los casos obtenemos las soluciones $(4, 18), (2, 6), (4, -18), (2, -6)$.

$\square$

Solución 2



- Veamos que

$$\begin{aligned}\angle CPB &= 180 - (\angle ABC - \angle ABE) - (\angle BCA - \angle FCA)\\ &= \angle CAB + (\angle EAB + \angle CAF)\\ &= 2\angle CAB = \angle CBO\end{aligned}$$

  de donde $BCPO$ is cíclico.

- Por Ptolemeo, $PC \cdot OB + PO \cdot BC = PB \cdot OC$. Sabemos que $OB = OC = R$, donde R es el radio de la circunscrita al $\triangle ABC$. Combinando esto con $PC + PO = PB$ obtenemos que $BC = R$.

- $\triangle OBC$ es equilátero lo que implica que $\angle CAB = 30$.

$\square$

Solución 3

Primeramente veamos que $n(n-1)/2 = 1 + 2 + \cdots + (n-1)$.
Usando AM-GM tenemos que

$$\frac{i - 1 + x_i^i}{i} = \frac{\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{i-1} + x_i^i}{i} \geq \sqrt[i]{x_i^i} = x_i$$

que implica que

$$i - 1 + x_i^i \geq i \cdot x_i$$

y sumando tenemos el resultado deseado. $\square$