Prueba 28.

Problem 1 (Brasil 1998)**.** *15 enteros mayores o iguales que* 2 *y menores o iguales que* 2021 *son primos relativos dos a dos. Prueba que al menos uno de ellos es primo.*

Problem 2 (Grecia 2012)**.** *Sea* ABC *acutángulo con* $AB < AC < BC$ *y sea* O *su circuncentro. La bisectriz* AD *corta a* (ABC) *en* K*. Sea* $P \in AO$ *tal que* $PD = PA$*. La circunferencia de centro en* P *y radio* PA *corta a* AB *y* AC *en* X *e* Y *respectivamente. Sea* M *el punto medio de* YC*. Prueba que* XY, DM *y* KC *son concurrentes.*

Problem 3 (IMO shortlist 1989)**.** *Sea* $T_1 = \{1, 2, \dots 8\}$ *y para* $k \geq 2$ *sea* T_k *el conjunto de los números de* k *cifras que no contienen ningún* 9 *en su representacion decimal. Para todo* $k \geq 1$ *sea* $S_k = \sum_{n \in T_k} \frac{1}{n}$.

a) Determina una constante $0 < C < 1$*, tal que* $S_{k+1} < C \cdot S_k$ *para todo* $k \geq 1$*.*

b) Demuestra que la suma de los inversos de los números que no contienen ningún 9 *en su representación decimal es menor que 30.*

Soluciones

Solución 1

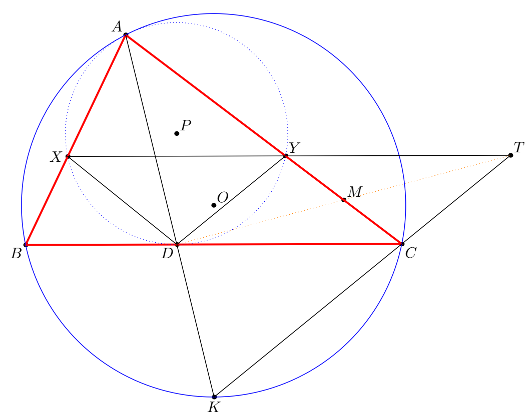
Sea $S = \{a_1, a_2, \ldots a_{15}\}$ dichos números y sea $P = \{p_1, p_2, \ldots p_{15}\}$ el conjunto tal que p_i es el menor primo que divide a a_i.
Suponiendo que todos los a_i son compuestos tenemos que $a_i \geq p_i^2$ para todo i.
Por otra parte los p_i son distintos ya que los a_i son primos relativos dos a dos. Esto implica que al menos uno de los p_i, digamos p_m, es mayor o igual que 47 que es el primo número 15. Entonces tenemos que

$$a_m \geq p_m^2 \geq 47^2 > 2021$$

contradición. De donde al menos uno de los a_i es primo.

Solución 2

En la figura sea $T = XY \cap KC$



- Como $AP = PD$ y $AO = OK$ por recíproco del teorema de las tranversales $PD \parallel OK$ y tenemos que $PD \perp BC$ por tanto BC es tangente en D a $(AYDX)$.

- Ahora
$$\angle XDB = \angle XAD = \angle DAY = \angle DXY$$
de donde $XY \parallel BC$.

- Por otra parte

  $$\angle ADY = \angle AXY = \angle ABC = \angle AKC$$

  de donde $DY \parallel KC$.

- hemos probado que $DYTC$ es un paralelogramo de donde D, M y T son colineales.

Esta colinealidad implica la concurrencia deseada. $\square$

Solución 3

a) Veamos que

$$S_{k+1} = \sum_{a \in T_k} \sum_{k=0}^{8} \frac{1}{10a+b} < \sum_{a \in T_k} \sum_{k=0}^{8} \frac{1}{10a} = \sum_{a \in T_k} \frac{9}{10a} = \frac{9}{10} \sum_{a \in T_k} \frac{1}{a} = \frac{9}{10} S_k$$

tomando $C = \frac{9}{10}$ concluimos este inciso.
b) Veamos ahora que

$$\sum_{k \geq 1} S_k < \sum_{k \geq 1} \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} S_1 = S_1 \left(1 + \frac{9}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^2 \dots\right) = 10 S_1$$

Calculando directamente obtenemos que $s_1 < 3$, de donde $\sum_{k \geq 1} S_k < 30$. $\square$