Prueba 27.

Problem 1 (Hunría-Israel 1991)**.** *Sea* $P(x)$ *un polinomio con coeficientes enteros tal que* $P(0) = -1$ *y* $P(x_1) = P(x_2) = ... = P(x_n) = 10000$ *donde* $x_1, x_2, ..., x_n$ *son enteros distintos. Calcula el mayor valor de* n*.*

Problem 2 (Polonia 2018)**.** *Sea* $ABCD$ *un trapecio con bases* AB *y* CD*. La circunferencia de diámetro* BC *es tangente a la recta* AD*. Prueba que la circunferencia de diámetro* AD *es tangente a la recta* BC*.*

Problem 3 (A Path to Combinatorics for Undergraduates/ Counting Strategies, Titu Andrescu)**.** *Un número par de personas se sientan alrededor de una mesa redonda. Luego de un receso vuelven a sentarse, no necesariamente en los mismos puestos. Demuestra que existe al menos un par de personas que luego del receso están sentados a la misma distancia que al inicio.*

Soluciones

Solución 1

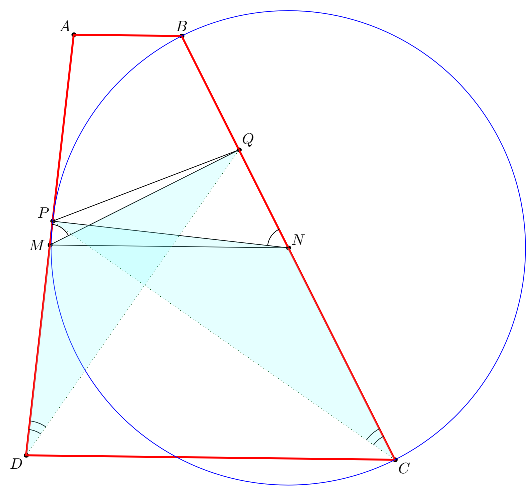
Veamos que
$$P(x) = 10000 + Q(x)\prod_k (x - x_k)$$
donde Q es un polinomio con coeficientes enteros. Haciendo $x = 0$ tenemos que

$$P(0) = 10000 + (-1)^n Q(0)\prod_k x_k \Rightarrow Q(0) = \frac{(-1)^{n+1}10001}{\prod_k x_k}$$

Notemos que $Q(0)$ es entero, de donde los x_k son divisores de 10001. Estos divisores pertenecen al conjunto $\{\pm 1, \pm 73, \pm 137, \pm 10001\}$. Claramente el valor absoluto del producto de cualesquiera 5 de estos(distintos) es mayor que 10001, de donde $n \leq 4$.
El polinomio $P(x) = 10000 + (x+1)(x-1)(x-73)(x-137)$ satisface las condiciones para $n = 4$, de donde el máximo valor de n es $\boxed{4}$. $\square$

Solución 2

En la figura, sean M, N los puntos medios de los segmentos AD y BC respectivamente y P, Q las proyecciones ortogonales de N, M en AD y BC respectivamente.



- Veamos que $\angle NPM = \angle MQN = 90$ por tanto $MPQN$ es cíclico.
- De lo anterior tenemos que $\angle APQ = \angle MNB = \angle DCB$ de donde $DPQC$ es cíclico y por tanto $\angle BCP = \angle ADQ$.
- Sabemos además que $\angle BNP = \angle AMQ$, combinando con lo anterior obtenemos que $\triangle PNC \sim \triangle QDM$, lo que implica que $MQ = MD = MA$ y concluimos que la circunferencia de diámetro AD es tangente a BC en Q.

$\square$

Solución 3

El problema es equivalente al siguiente: Sea una permutación $\sigma \in S_{2n}$, entonces existen i, j tal que

$$|i - j| = |\sigma(i) - \sigma(j)|.$$

Supongamos que las $2n$ personas son vértices de un polígono regular $P_0 P_1 \dots P_{2n-1}$. La permutación σ manda a la persona ubicada al inicio en P_i hacia $P_{\sigma(i)}$. La cantidad de vértices entre P_a y P_b es la misma luego del receso si

$$a - \sigma(a) \equiv b - \sigma(b) \pmod{2n}. \qquad (1)$$

Supongamos a modo de constradicción que los números $i - \sigma(i)$ no repiten ningún resto módulo $2n$ cuando i varía desde 0 hasta $2n-1$. La suma de dichos restos es $(2n-1)n \pmod{2n}$. Por otra parte $\sigma(i)$ al igual que i barre todos los restos módulo $2n$ de donde dicha suma es 0, esto contradice la congruencia previa, por tanto existen a y b que satisfacen (1). $\square$