Prueba 26.

Problem 1 (Noruega 1995). *La función f satisface $f(1) = 1$ y*

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = n^2 f(n)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Determina $f(2021)$.

Problem 2 (Filipinas 2020). *Un T-tetromino se forma concatenando 3 cuadrados unidad formando un rectángulo de 1×3 y luego adjuntado un cuadrado unidad encima del cuadrado del medio. Determina el menor número de cuadrados unidad que hay que retirar de una grilla de 202×202 de modo tal que esta pueda ser cubierta con T-tetrominos.*

Problem 3 (Rumanía 2019). *El punto P está en el interior del triángulo ABC tal que $BP = AC$. R es el punto medio de AP,M es el punto medio de BC y E es la intersección de BP con AC. Prueba que la bisectriz del $\angle BEA$ es perpendicular a MR.*

Soluciones

Solución 1

Probemos por inducción que $f(n) = \frac{2}{n(n+1)}$. El caso base es trivial. Supongamos que se cumple hasta $n = k$.
Veamos que

$$\begin{aligned} f(k+1) &= \frac{2\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k\cdot(k+1)}\right)}{(k+1)^2 - 1} \\ &= \frac{2\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)}{k^2 + 2k} \\ &= \frac{2\left(1 - \frac{1}{k+1}\right)}{k^2 + 2k} \\ &= \frac{2}{(k+1)(k+2)} \end{aligned}$$

y se completa la inducción. De donde $f(2021) = \frac{2}{2021\cdot 2022}$. $\square$

Solución 2

Claim 1: Una grilla de 202×202 no se puede cubrir con T-tetrominos.
Demostración: Si coloreamos la grilla como un tablero de ajedrez notamos que un T-tetromino puede cubrir a bien 3 casillas blancas y una negra, o bien 3 negras y una blanca. Como hay la misma cantidad de casillas negras que de blancas necesitamos la misma cantidad de cada tipo de T-tetrominos, pero como cada T-tetromino cubre 4 casillas, necesitamos $\frac{202\cdot 202}{4} = \textit{impar}$ T-tetrominos, contradicción.

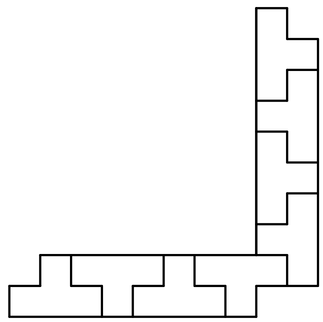
Sabemos que debemos la cantidad de casillas a retirar es múltiplo de 4. El siguiente claim concluye el problema.

Claim 2: Es posible retirar 4 casillas y cubrir la grilla resultante.
Demostración: Veamos que fácilmente podemos cubrir una grilla de 4×4. Por tanto podemos cubrir la grilla de 200×200 ubicada en la parte superior

izquierda. Retiremos ahora las casillas ubicadas en las posiciones

$$(1,2),(201,1),(202,1),(202,202)$$

las casillas restantes se pueden cubrir con una L similar a la siguiente figura

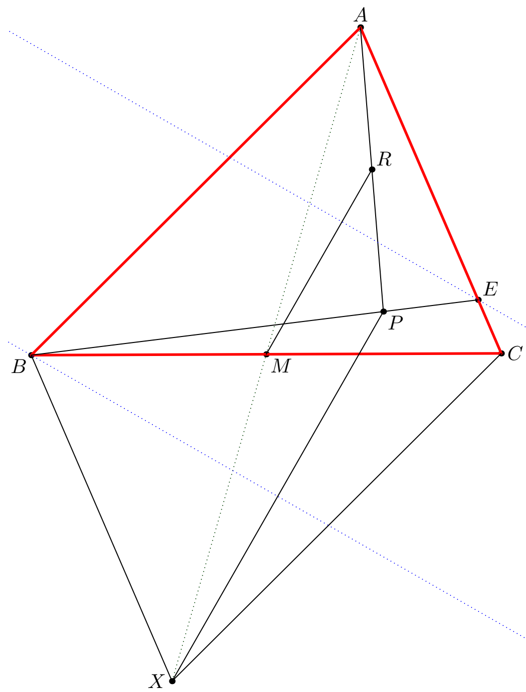


de donde el claim está probado.

La respuesta final es por tanto 4.

Solución 3

En la figura sea X el simétrico de A respecto a M.



- $ACXB$ es un paralelogramo por tanto $BX = AC = BP$, de donde $\triangle XBP$ es isósceles de base XP y entonces la bisectriz del $\angle XBP$ es perpendicular a XP.
- Como $AE \parallel BX$ la bisectriz del $\angle XBP$ es paralela a la bisectriz del $\angle BEA$.
- $MR \parallel XP$.
- Combinando las anteriores vemos que la bisectriz del $\angle BEA$ es perpendicular a MR.

$\square$