Prueba 25.

Problem 1 (104 number theory problems from the training of the USA IMO team)**.** *Prueba que cualquier número formado por 2^n dígitos iguales tiene al menos n factores primos distintos.*

Problem 2 (Mexico 2002)**.** *$ABCD$ es un paralelogramo. K es el circuncírculo de ABD. Las rectas BC y CD cortan a K de nuevo en E y F respectivamente. Prueba que el circuncentro de CEF pertenece a K.*

Problem 3 (Basics of Olympiad Inequalities, Samin Riasat)**.** *Sean a, b, c las longitudes de los lados de un triángulo. Prueba que*

$$\sqrt{3(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})} \geq \sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}.$$

Soluciones

Solución 1

Un número N de esa forma puede ser escrito como

$$N = k\frac{10^{2^n}-1}{10-1} = k(10+1)(10^2+1)(10^4+1)\cdots(10^{2^{n-1}}+1) \qquad (1)$$

Claim: Si $h_1 > h_2$ entonces $\gcd(10^{2^{h_1}}+1, 10^{2^{h_2}}+1) = 1$.
Demostración: veamos que

$$10^{2^{h_2}}+1 | 10^{2^{h_1}}-1 = (10+1)(10^2+1)(10^4+1)\cdots(10^{2^{h_1}}+1)$$

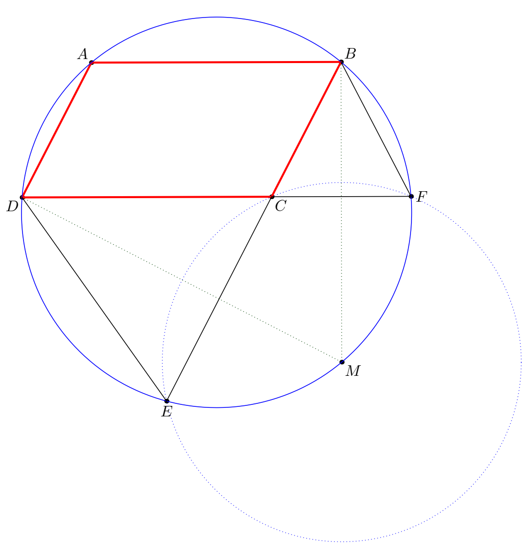
de donde

$$\gcd(10^{2^{h_2}}+1, 10^{2^{h_1}}+1) \leq \gcd(10^{2^{h_1}}-1, 10^{2^{h_1}}+1) = \gcd(2, 10^{2^{h_1}}+1) = 1$$

y el claim queda probado.
Volviendo al problema, se concluye notando que en (1) debido al claim cada uno de los factores, salvo k, tiene al menos un primo distinto. $\square$

Solución 2

En la figura sea M el punto medio del arco EF en K.



Veamos que $ABFD$ y $DABE$ son trapecios cíclicos por tanto son isósceles, de donde los triángulos BCF y DCE son isósceles lo que implica que BM y DM además de bisctrices de $\angle CBF$ y $\angle EDC$ son también mediatrices de CF y de CE de donde M es el circuncentro del triángulo CFE. $\square$

Solución 3

Usemos la **tranformación de Ravi**. Sean $x, y, z > 0$ tales que $a = x+y$, $b = y + z$ y $c = z + x$. La desigualdad se transforma en

$$3\Big(\sqrt{(x+y)(y+z)}+\sqrt{(y+z)(z+x)}+\sqrt{(z+x)(x+y)}\Big) \geq 2(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2 \quad (2)$$

Veamos que por Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x+y)(y+z)} &= \sqrt{(y+x)(y+z)} \geq y + \sqrt{xz} \\
\sqrt{(y+z)(z+x)} &= \sqrt{(z+y)(z+x)} \geq z + \sqrt{xy} \\
\sqrt{(z+x)(x+y)} &= \sqrt{(x+z)(x+y)} \geq z + \sqrt{yz}
\end{aligned}$$

y además $x + y + z \geq \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}$ (Demuéstrenlo!!!).
De donde

$$\begin{aligned}
3\Big(\sqrt{(x+y)(y+z)} + \sqrt{(y+z)(z+x)} + \sqrt{(z+x)(x+y)}\Big) &\geq 3\Big(x+y+z+\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\Big) \\
&\geq 2(x+y+z) + 4(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}) \\
&= 2(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2
\end{aligned}$$

y concluimos que (2) es verdadera. $\square$