Prueba 24.

Problem 1 (Rep. Checa-Polonia-Eslovaquia Junior 2013). *Decidir si existen infinitos primos p que tienen un múltiplo de la forma $n^2 + n + 1$ para algún número natural n.*

Problem 2 (Rioplatense 2011). *Sean Γ_1 y Γ_2 dos circunferencias que se cortan en P y Q . Sean A, B y C puntos en Γ_1 y D, E y F puntos en Γ_2 tales que las rectas AE y BD se intersectan en P y las rectas AF y CD se intersectan en Q. Denotamos por M a la intersección de AB y DE y por N a la intersección de AC y DF. Prueba que $AMDN$ es un paralelogramo.*

Problem 3 (Balcánica shortlist 2010). *Una banda de ancho w es la región ubicada entre dos rectas cuya distancia entre ellas es w. Sea S un conjunto de n ($n \geq 3$) puntos del plano tales que cualesquiera 3 de ellos pueden ser cubiertos por una banda de ancho 1. Prueba que S puede ser cubierta por una banda de ancho 2.*

Soluciones

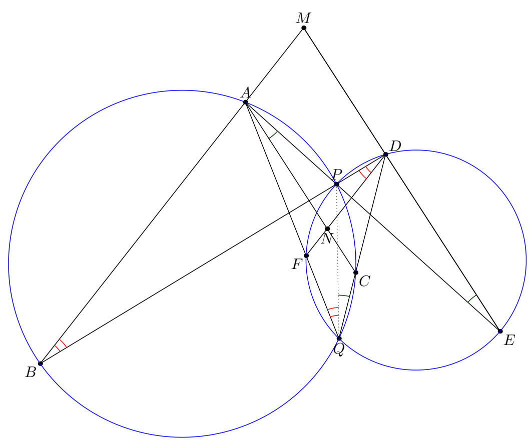
Solución 1

Veamos que $3|1^2 + 1 + 1$ de donde al menos un primo cumple la propiedad. Supongamos que solo un número finito de primos $P = \{p_1, p_2, \cdots p_t\}$ cumple la propiedad. Veamos que cualquier factor primo de

$$(p_1 p_2 \cdots p_t)^2 + (p_1 p_2 \cdots p_t) + 1$$

cumple la propiedad y no está en P, contradicción.
Concluimos que existen infinitos primos que cumplen dicha propiedad. $\square$

Solución 2



En la figura

$$\angle PDF = \angle PQF = \angle PQA = \angle PBA$$

de donde $DF \parallel AB$, análogamente

$$\angle PAC = \angle PQC = \angle PQD = \angle PED$$

de donde $AC \parallel DE$. $\square$

Solución 3

Claim: Si A, B, C son puntos de S, al menos una de las alturas del $\triangle ABC$ es menor o igual que 1.
Demostración: Sabemos que los puntos se pueden cubrir por una banda de ancho 1. Si trazamos las 3 perpendiculares a dicha banda por A, B y C al menos una de estas corta a uno de los lados del triángulo, la altura relativa a dicho lado es claramente menor que 1.

Sean ahora A_1 y A_2 puntos de S tal que la distancia entre ellos es máxima. La banda formada por las rectas paralelas a A_1A_2 cuya distancia a A_1A_2 es 1 cubre todos los puntos de S. En efecto, sea A_3 otro punto cualquiera de S, en el $\triangle A_1A_2A_3$ está claro que la altura relativa a A_3 es la menor y por el claim dicha altura es menor que 1. $\square$