Prueba 23.

Problem 1 (Grecia Junior 2014). *Se colorean los números* $1, 2, 3, ..., 20$ *de blanco y negro de tal forma que ambos colores son usados. Encuentra la cantidad de formas que podemos realizar colorear los números de tal forma que el producto de los números blancos y el producto de los números negros son primos relativos.*

Problem 2 (Irlanda 2016). *En el triángulo* ABC *tenemos que* $AB \neq AC$. *Las bisectrices de* $\angle ABC$ *y* $\angle ACB$ *cortan a* AC *y* AB *en* E *y* F, *respectivamente, y estas se cortan en* I. *Si* $EI = FI$ *encuentra la medida del* $\angle BAC$.

Problem 3 (Portugal 2009). *Juan calculó el producto de las cifras positivas de cada entero desde* 1 *hasta* 10^{2009} *y luego sumó* 10^{2009} *productos. Qué número obtuvo Juan.*

Soluciones

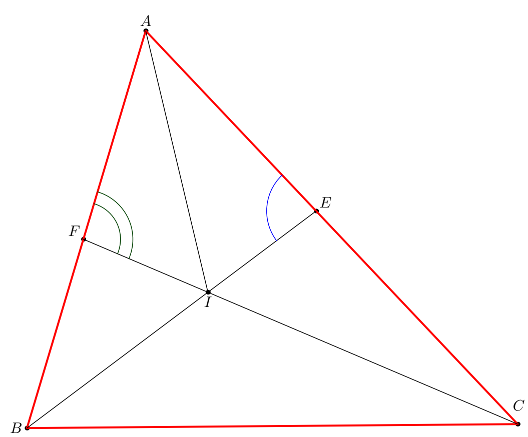
Solución 1

Veamos que los números $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20$ deben tener el mismo color. Los restantes son $1, 11, 13, 17$, y 19. De esta forma la cantidad buscada es

$$2\left(\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}\right)=2(2^5-1)=62$$

$\square$

Solución 2



Usando ley de los senos en $\triangle AFI$ y $\triangle AEI$ obtenemos que

$$\frac{EI}{\sin\angle A/2}=\frac{AI}{\sin\angle AEI}$$

y

$$\frac{FI}{\sin\angle A/2}=\frac{AI}{\sin\angle AFI}$$

de donde tenemos dos opciones, o bien $\angle AEI = \angle AFI$, o bien $\angle AEI = 180 - \angle AFI$. En el primer caso es fácil obtener que $AB = AC$ de donde

$\boxed{\angle AEI = 180 - \angle AFI}$. El problema concluye con un cálculo de ángulos sencillo

$$180 = \angle A + (180 - (\angle B/2 + \angle C/2)) \Rightarrow \angle A = (\angle B/2 + \angle C/2))$$

y concluimos que $\angle A = 60$. $\square$

Solución 3

Cammbiamos todos 0s por 1s. La suma de todos los productos desde 0 hasta $\underbrace{999\ldots9}_{2009}$ es

$$(1+1+2+\ldots+9)(1+1+2+\ldots+9)\ldots(1+1+2+\ldots+9) = 46^{2009}.$$

Se excluye el 0 y se incluye el 10^{2009} por tanto la suma se mantiene igual. $\square$