Prueba 21.

Problem 1 (Problema del mes, Febrero, 2021, RSME)**.** *Dadas las relaciones entre los números* a, b *y* c*:*

- $a + b + c = 2$
- $a^2 + b^2 + c^2 = 1$
- $a^3 + b^3 + c^3 = 0$

Halla el valor de $a^4 + b^4 + c^4$.

Problem 2 (102 Combinatorial Problems, Titu Andrescu)**.** 25 *chicos y* 25 *chicas se sientan en una mesa redonda. Prueba que siempre es posible encontrar encontrar una persona sentada entre dos chicas.*

Problem 3 (Rusia 1993)**.** *Sean* AB *y* CD *dos segmentos de longitud* 1*. Si estos se intersectan en* O *de modo que* $\angle AOC = 60$*, prueba que* $AC + BD \geq 1$.

Soluciones

Solución 1

- Veamos que $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$ de donde $(ab+bc+ac) = \frac{3}{2}$.
- Veamos que $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b+c)(ab+bc+ac)-3abc$ de donde $abc = \frac{1}{3}$.
- Sea el polinomio $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$, por las fórmulas de Vietta

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ac)x-abc \\ &= x^3-2x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{3} \end{aligned}$$

- Por último

$$\begin{aligned} 0 &= aP(a)+bP(b)+cP(c) \\ &= (a^4-2a^3+\frac{3}{2}a^2-\frac{1}{3}a)+(b^4-2b^3+\frac{3}{2}b^2-\frac{1}{3}b)+(c^4-2c^3+\frac{3}{2}c^2-\frac{1}{3}c) \\ &= (a^4+b^4+c^4)+2(a^3+b^3+c^3)+\frac{3}{2}(a^2+b^2+c^2)-\frac{1}{3}(a+b+c) \\ &= (a^4+b^4+c^4)+\frac{3}{2}-\frac{2}{3} \end{aligned}$$

y concluimos que $\boxed{a^4+b^4+c^4 = -\frac{5}{6}}$.

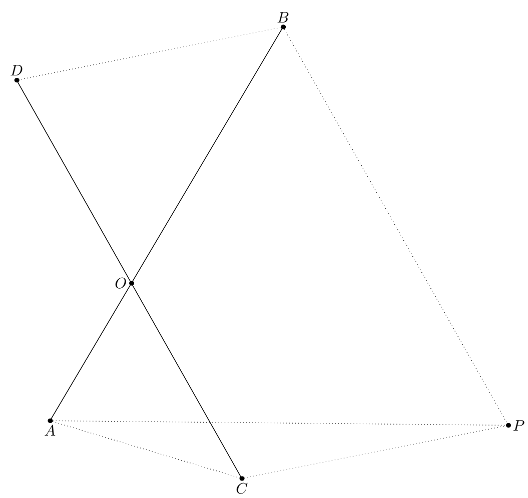
Nota: Veamos que potencias cuartas estan sumando negativo, de donde podemos afirmar que P tiene exactamente dos raíces complejas. □

Solución 2

Supongamos que son $a_1, a_2, \ldots, a_{50}$ las posiciones en la mesa siendo a_{50} y a_1 contiguas. Consideremos dos mesas nuevas y sentemos a los chicos y las chicas con la siguiente distribución: en una mesa los que ocupan las posiciones $(a_1, a_3, \ldots a_{49})$ y en la otra mesa los que ocupan las posiciones $(a_2, a_4, \ldots a_{50})$. Veamos que en alguna de las mesas hay al menos 13 chicas y en dicha mesa hay al menos 2 chicas seguidas lo que implica que en la mesa original hay al menos una persona sentada entre 2 chicas. $\square$

Solución 3

En la figura sea P tal que $CDBP$ es un paralelogramo.



Es fácil ver que $\triangle ABP$ es equilátero(Demuéstrenlo!!!) de donde

$$AC + BD = AC + CP \geq AP = 1$$

hemos usado desigualdad triangular. $\square$