Prueba 21.

Problem 1 (Francia tst 2000)**.** *Los puntos P, Q, R, S pertencen a una misma circunferencia y $\angle PSR$ es recto. H, K son las proyecciones de Q sobre las rectas PR, PS. Prueba que HK corta al segmento QS en el punto medio.*

Problem 2 (Arabia Saudita BMO tst 2013)**.** *Encuentra todas las funciones $f : R \to R$ que satisfacen*

$$f(f(f(x) + y) + y) = x + y + f(y)$$

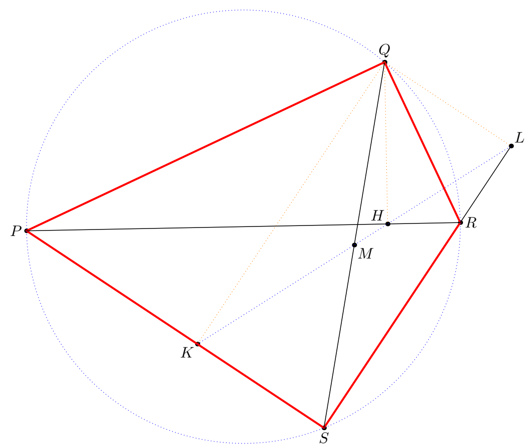
para tods $x, y \in \mathbb{R}$.

Problem 3 (Canadá Junior 2020)**.** *Sean $n \geq 3$ reales positivos distintos. Prueba que hay a lo sumo $n - 2$ potencias de 3 distintas que pueden ser escrita como suma de 3 elementos distintos de estos n números.*

Soluciones

Solución 1

En la figura sea L la proyección de Q sobre SR y sea $M = HK \cap QS$.



Veamos que K, H y L son colineales ya que determinan la recta de Simpson de Q en el cuadrilátero $PQRS$. El problema concluye notando que $QLSK$ es un rectángulo por tanto M es punto medio de QS. $\square$

Solución 2

Sea $P(x, y)$ la ecuanción funcional dada

- $P(x, 0)$ implica que $f(f(f(x))) = x + f(0)$ de donde f es biyectiva.
- $P(0, 0)$ implica que $f(f(f(0))) = f(0)$ por la inyectividad $(f(f(0)) = 0$.
- $P(x, -x)$ impica que $f(f(f(x)-x)-x) = f(-x)$ de donde $f(f(x)-x)-x = -x$. De esta forma $f(f(x)-x) = 0 = f(f(0))$ y por la inyectividad $f(x) - x = f(0)$ y finalmente tenemos que $f(x) = x + f(0)$.

Sustituyendo en la ecuación original tenemos que $f(0) = 0$ de donde la única solución es $\boxed{f(x) = x}$. $\square$

Solución 3

Claim: Si tenemos dos ternas distintas cuyas sumas son potencias de 3 distintas entonces el mayor de los elementos de una de las ternas es distinto al mayor elemento de la otra.

Demotración: Asumamos lo contrario. Sea L el mayor de los elementos de dos ternas distintas que suman potencias de 3 distintas. Tenemos entonces que

$$L + x + y = 3^a$$
$$L + p + q = 3^b$$

sin pérdida de generalidad $a > b$. Veamos que

$$L + x + y = 3^a = 3 \times 3^{a-1} \geq 3 \times 3^b = 3L + 3p + 3q$$

$$\implies x + y \geq 2L + 3p + 3q$$

Contradicción. Luego hemos asumido algo falso lo que implica que el claim es verdadero.

El problema concluye notando que si ordenamos los números los dos menores nunca son el mayor en ninguna terna y los restantes $n-2$ puede ser el mayor en a lo sumo una terna cada uno. $\square$