Prueba 1.

Problem 1. *Cuál es el menor entero positivo que al retirar su primera cifra se reduce 57 veces.*

Problem 2. *El pentágono regular $ABCDE$ está inscrito en la circunferencia Ω. El punto F pertenece al menor de los arcos AE. Demuestra que*

$$FA + FC + FE = FB + FD$$

Problem 3. *En la pizarra están escritos los números $1, 2, \ldots, 4n - 1$. En un movimiento podemos reemplazar 2 cualesquiera de ellos por su diferencia. Prueba que luego de $4n - 2$ pasos el número que quedará en la pizarra es par.*

Soluciones

Solución 1

Sea $n = \overline{ab}$ donde a es una cifra y b tiene k cifras. Entonces tenemos que $\overline{ab} = 57\overline{b}$, lo que se traduce en $a10^k + b = 57b \Rightarrow a10^k = 56b$. Como $7|56b$ entonces $7|a10^k$, de donde $a = 7$.
Ahora $10^k = 8b$, de donde $8|10^k$ lo que implica que $k \geq 3$, y como buscamos el menor, para $k = 3$ tenemos $b = 125$ y concluimos que el numero buscado es 7125.

Solución 2 Sea l la longitud del lado y d la longtud de las diagonales del pentágono.
Aplicando Ptolomeo en los cuadriláteros $EFAB$ y $EFAD$ obtenemos que $FB \cdot l = EF \cdot l + FA \cdot d$ y $FD \cdot l = EF \cdot d + FA \cdot l$ sumando ambas

$$(FB + FD)l = (EF + FA)l + (EF + FA)d \tag{1}$$

Aplicando Ptolomeo en $EFAC$ obtenemos que $FC \cdot l = (EF + FA)d$, sustituyendo en (1) obtenemos que $(FB + FD)l = (EF + FA + FC)l$ lo que implica que $FB + FD = EF + FA + FC$.

Solución 3 Veamos que en la lista $\{1, 2 \ldots, 4n - 1\}$ hay $2n$ impares y $2n - 1$ pares.

- Si escojo dos pares y los cambio por su diferencia la cantidad de pares disminuye en 1 y la de impares no se afecta.
- Si escojo dos impares y los cambio por su diferencia la cantidad de pares aumenta en 1 y la de impares disminuye en 2.
- Si escojo un impar y un par y los cambio por su diferencia la cantidad de pares disminuye en 1 y la de impares no se afecta.

En cualquiera de los casos la cantidad de impares no altera su paridad por tanto si hay $2n$ al inicio no puede haber 1 al final, concluyendo que el último número siempre es par.