Prueba 19.

Problem 1 (Bielorrusia 2010). *Sea M la intersección de las diagonales AC y BD del trapecio $ABCD$ ($BC||AD$), $AD > BC$. La circunferencia w_1 pasa por M y es tangente a AD en A. la circunferencia w_2 pasa por M y es tangente a AD en D. El punto S es la intersección de AB y DC. La recta AS intersecta a w_1 en X. La recta DS intersecta a w_2 en Y. O es el centro del circuncírculo de $\triangle ASD$. Prueba que $SO \perp XY$.*

Problem 2 (Mathematical Excallibur Vol 7, Number 3.). *Cada miembro de un club tiene como mucho 3 enemigos en el club. Prueba que podemos dividir el club en dos grupos de modo tal que cada miembro tiene como mucho 1 enemigo en su grupo.*

Problem 3 (Filipinas 2017). *Dado $n \in \mathbb{N}$, sea $\sigma(n)$ la suma de los divisores de n y sea $\phi(n)$ la cantidad de enteros positivos menores que n y primos relativos con n.*

(a) Prueba que si $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ entonces

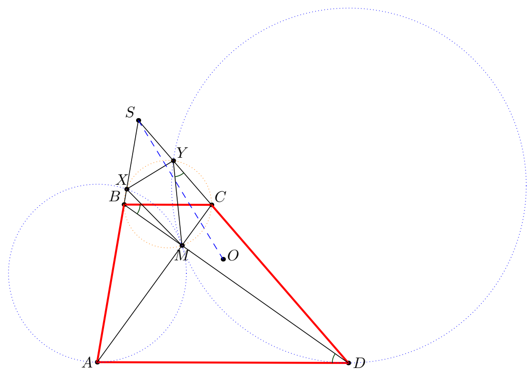
$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^{k} \frac{p^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

(b) Prueba que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{\sigma(n)} + \frac{1}{\phi(n)} \geq \frac{2}{n}$$

Soluciones

Solución 1



- Veamos que como AD es tangente a w_2 tenemos que $\angle MYD = \angle MDA$, además $\angle MDA = \angle MBC$, de donde $\angle MYD = \angle MBC$ y $BYCM$ es cíclico. Análogamente $CXBM$ es cíclico y tenemos que $BXYCM$ es cíclico.

- XY y BC son antiparalelas respecto al $\angle BSC$ por tanto XY y AB también son antiparalelas respecto al $\angle BSC$ por tanto SO es isgonal a la altura en $\triangle ABC$ lo que implica que es altura en el $\triangle SXY$.

$\square$

Solución 2

Al inicio dividamos de manera aleatoria el club en dos grupos. Consideremos S el número de pares de enemigos que comparten grupo.
Si un miembro tiene como mínimo 2 enemigos en su grupo entonces tiene cómo mucho 1 enemigo en el otro grupo. Cambiamos entonces dicho miembro al grupo contrario. De este modo S decrece como mínimo en 1. Como S es un entero no negativo, no puede decrecer infinitamente lo que implica que después de un número finito de traspasos cada miembro tiene como mucho 1 enemigo en su grupo. $\square$

Solución 3

(a) Procedamos por inducción en la cantidad de primos que dividen a n.

- Sea $n = p_1^{\alpha_1}$ esto implica que $\sigma(n) = 1 + p_1 + p_1^2 + \dots p_1^{\alpha_1} = \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}$.
- Supongamos que la fórmula es válida para todos los n divisibles por k primos. Sea $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} p_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$. Veamos que

$$\begin{aligned}
\sigma(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} p_{k+1}^{\alpha_{k+1}}) &= \sigma(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}) + p_{k+1}\sigma(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}) + \\
&\quad + p_{k+1}^2\sigma(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}) + p_{k+1}^{\alpha_{k+1}}\sigma(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}) \\
&= \sigma(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k})(1 + p_{k+1} + p_{k+1}^2 + \cdots + p_{k+1}^{\alpha_{k+1}}) \\
&= \sigma(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k})\left(\frac{p_{k+1}^{\alpha_{k+1}} - 1}{p_{k+1} - 1}\right) \\
&= \prod_{i=1}^{k+1} \frac{p^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}
\end{aligned}$$

lo que finaliza la inducción.
(b) Sea $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$. Veamos ahora que

$$\sigma(n)\varphi(n) = \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1} \cdot (p_i - 1)p_i^{\alpha_i - 1} \leq \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i+1} \cdot p_i^{\alpha_i-1} = n^2.$$

Hemos usado que $\phi(n) = \prod_{i=1}^{k}(p_i - 1)p_i^{\alpha_i - 1}$. Aplicando ahora AM-GM,

$$\frac{1}{\sigma(n)} + \frac{1}{\varphi(n)} \geq \frac{2}{\sqrt{\sigma(n)\varphi(n)}} \geq \frac{2}{n}$$

$\square$