# Prueba 18.

**Problem 1** (Brasil 1993)**.** *La sucesión* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es definida por* $a_1 = 8, a_2 = 18, a_{n+2} = a_{n+1}a_n$. *Encuentra todos los términos que son cuadrados perfectos.*

**Problem 2** (Malasia Junior 2015)**.** *Sea* $ABCD$ *un cuadrilátero convexo. Las bisectrices de* $\angle B$ *y* $\angle C$ *se intersectan en* $E$. *Los rayos* $\overrightarrow{BA}$ *y* $\overrightarrow{CD}$ *se cortan en* $F$. *Prueba que si* $AB + CD = BC$, *entonces* $A, D, E, F$ *son concíclicos.*

**Problem 3** (USAMO 2002)**.** *Sea* $S$ *un conjunto con* 2002 *elementos y sea* $N$ *un entero con* $0 \leq N \leq 2^{2002}$. *Prueba que es posible colorear cada subcojunto de* $S$ *de blanco o negro de modo que se cumplen las siguientes condiciones:*

*(a) La unión de dos subconjuntos blancos es blanco.*

*(b) La unión de dos subconjuntos negros es negro.*

*(c) Hay exactamente* $N$ *conjuntos blancos.*

# Soluciones

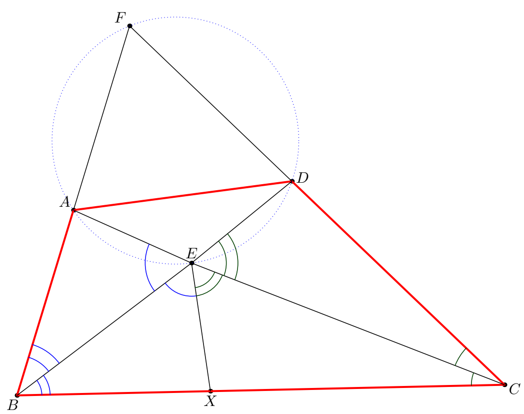
## Solución 1

Veamos que $a_n = 2^{c_n}3^{d_n}$ donde

- $d_1 = 0$, $d_2 = 2$ y $d_{n+2} = d_{n+1} + d_n$ de donde $d_n$ siempre es par.
- $c_1 = 3$, $c_2 = 1$ y $c_{n+2} = c_{n+1} + c_n$. Por inducción se prueba que $c_{3k}$ es par y que $c_{3k+1}$ y $c_{3k+2}$ son impares.
- Se concluye que $a_n$ es cuadrado perfecto si y solo si $\boxed{3|n}$. $\square$

## Solución 2

Sea $X \in BC$ tal que $BX = AB$, de la condición dada tenemos que $XC = CD$.




- Veamos que $\triangle ABE = \triangle XBE$ y $\triangle DCE = \triangle XCE$.
- $\angle AED = 360 - 2\angle BEC = 360 - 2(180 - (\angle ABC/2 + \angle DCB/2)) = \angle ABC + \angle DCB$.
- Finalmente $\angle AED + \angle AFD = \angle ABC + \angle DCB + \angle AFD = 180$.

$\square$

**Solución 3**

Probemos que se puede hacer para cualquier conjunto de $n$ elementos, $n$ es entero positivo. Sea $S_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ y un entero $N$ con $0 \leq N \leq 2^n$.

Apliquemos inducción en $n$. El caso $n = 1$ es trivial. Asumamos que la coloración deseada es posible para los subconjuntos de $S_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ y cualquier entero $N_n$ con $0 \leq N_n \leq 2^n$. Probemos que existe una coloración para los subconjuntos de $S_{n+1} = \{1, 2, \ldots, n, n+1\}$ y cualquier $N_{n+1}$ con $0 \leq N_{n+1} \leq 2^{n+1}$. Tenemos los siguientes casos.

Caso $(i)$. $0 \leq N_{n+1} \leq 2^n$. Aplicando la hipótesis a $S_n$ y $N_n = N_{n+1}$, tenemos una coloración para los subconjuntos de $S_n$ que satisface $(a)$, $(b)$ y $(c)$. Los subconjuntos de $S_{n+1}$ que quedan sin colorear contienen a $n+1$, los coloreamos todos negros. Es fácil ver que esta coloración funciona.

Caso $(ii)$. $2^n + 1 \leq N_{n+1} \leq 2^{n+1}$. Aplicando la hipótesis a $S_n$ y $N_n = 2^{n+1} - N_{n+1}$, tenemos una coloración para los subconjuntos de $S_n$ que satisface $(a)$, $(b)$ y $(c)$. Los subconjuntos de $S_{n+1}$ que quedan sin colorear contienen a $n+1$, lo coloreamos todos de negro. Finalmente los cambiamos todos de color. Es fácil ver que esta coloración funciona.

De donde la inducción es completa. $\square$