# Prueba 17.

**Problem 1** (Francia Junior tst 2020)**.** *Sea $ABC$ un triángulo y sea $K$ su circuncírculo. Sea $P$ la intersección de $BC$ con la tangente a $K$ en $A$. Sea $D$ y $E$ los simétricos de $B$ y $A$, respectively, con respecto a $P$. Sea $K_1$ el circuncírculo del triángulo $DAC$ y sea $K_2$ el circuncírculo del triángulo $APB$. Denotemos por $F$ el segundo punto de intersección de $K_1$ y $K_2$ y por $G$ el segundo punto de intersección de $K_1$ con $BF$. Prueba que $BC$ y $EG$ son paralelas.*

**Problem 2** (Canadá 2014)**.** *Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reales positivos cuyo producto es $1$. Prueba que la suma*

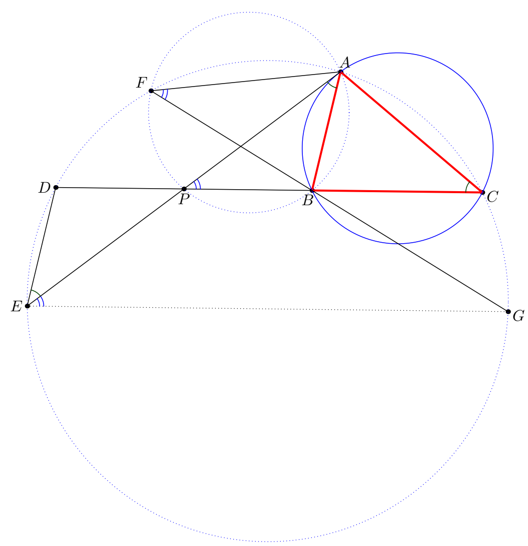
$$\tfrac{a_1}{1+a_1} + \tfrac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)} + \tfrac{a_3}{(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)} + \cdots + \tfrac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$$

*es mayor o igual que $\frac{2^n-1}{2^n}$.*
***Hint:*** *telescópica.*

**Problem 3** (Italia 2012)**.** *Determina todos los enteros positivos que son $300$ veces la suma de sus dígitos.*

# Soluciones

## Solución 1




- Por la definición de $E$ y $D$ tenemos que $ABED$ es un paralelogramo, de donde, $\angle DEA = \angle EAB = \angle ACD$, lo que implica que $ACDE$ es cíclico.

- Trabajando con ángulos en $K_1$ y $K_2$ tenemos que $\angle GEA = \angle GFA = \angle BFA = \angle BPA$

El resultado es inmediato. $\square$

## Solución 2

Veamos que

$$\frac{a_i}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_i)} = \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{i-1})} - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_i)}$$

por tanto

$$\frac{a_1}{1+a_1}+\frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)}+\frac{a_3}{(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)}+\cdots+\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}=$$
$$1-\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{(1+a_1)}-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)}+\cdots+\frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_{n-1})}-\frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)}$$
$$1-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}. \qquad (1)$$

Veamos Ahora que por $AM-GM$ si $a>0$ entonces $1+a\geq 2\sqrt{a}$. De donde como el producto de los $a_i$ es 1, tenemos que

$$\begin{aligned}
&(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)\geq 2^n\sqrt{a_1a_2\cdots a_n}=2^n\\
&\Rightarrow \frac{1}{2^n}\geq\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}\\
&\Rightarrow -\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}\geq -\frac{1}{2^n}\\
&\Rightarrow 1-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}\geq 1-\frac{1}{2^n}\\
&\Rightarrow 1-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}\geq \frac{2^n-1}{2^n}
\end{aligned}$$

Combinando esto con (1) tenemos el resultado deseado. □

### Solución 3

Tenemos que $n=300S(n)$,

- $n\equiv 3S(n) \pmod 9$, pero $n\equiv S(n) \pmod 9$, de donde $n\equiv 3n \pmod 9 \Rightarrow 2n\equiv 0 \pmod 9 \Rightarrow n\equiv 0 \pmod 9 \Rightarrow S(n)\equiv 0 \pmod 9 \Rightarrow 2700|n$.
- Sea $k\geq 4$ la cantidad de dígitos de $n$, o sea, $n\geq 10^{k-1}$, esto implica que $S(n)\leq 9(k-2)$ porque los dos últimos dígitos de $n$ son ceros.
- De lo anterior $10^{k-1}\leq n=300S(n)\leq 2700(k-2)$ lo que implica que $k<5$, de donde $k=4$.

- Se concluye que de los 3 múltiplos de 2700 de cuatro cifras, solo $\boxed{n = 2700}$ es solución.

$\square$