# Prueba 16.

**Problem 1** (Mediterránea 2000)**.** *Sea* $F = \{1, 2, ..., 100\}$ *y sea* $G$ *un subconjunto de* $F$ *de* 10 *elementos. Prueba que existen dos subcojuntos disjuntos* $S$ *y* $T$ *de* $G$ *cuyos elementos suman lo mismo.*

**Problem 2** (Balcánica Junior 2006)**.** *El triángulo* $ABC$ *es isosceles con* $AB = AC$, *y* $\angle BAC < 60°$. *Los puntos* $D$ *y* $E$ *son escogidos en* $AC$ *tal que ,* $EB = ED$, *y* $\angle ABD \equiv \angle CBE$. *Denotamos por* $O$ *la intersecciçon de las bisectrices internas de* $\angle BDC$ *y* $\angle ACB$. *Calcula* $\angle COD$.

**Problem 3** (Clásico)**.** *Demuestra que* $\left\lfloor n + \sqrt{n} + \frac{1}{2} \right\rfloor$ *no es cuadrado perfecto para ningún* $n \in \mathbb{Z}^+$.

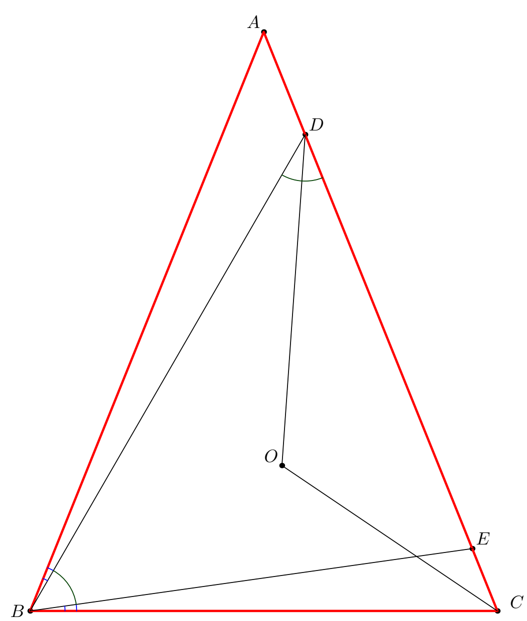
# Soluciones

## Solución 1

Sabemos que $G$ tiene $2^{10} - 1 = 1023$ subconjuntos no vacíos. La suma de 10 elementos de $F$ siempre es menor que $100 \times 10 = 1000$ de donde por PHP hay al menos 2 subconjuntos con la misma suma. Estos subconjuntos se pueden considerar disjuntos porque los elementos comunes se pueden suprimir y la suma sigue siendo la misma.

## Solución 2

Sea $\angle EBC = \angle ABD = \alpha$ y $\angle BDE = \angle DBE = \beta$.




- $\angle ABC = \angle ACB = 2\alpha + \beta$.
- $\angle BAC = \angle BDC - \angle ABD = \beta - \alpha$.
- Sumando los ángulos interiores de $\triangle ABC$ tenemos que $(2\alpha+\beta)+(2\alpha+\beta)+(\beta-\alpha) = 180$ de donde $\angle DBC = \alpha + \beta = 60$.
- $\angle COD + \frac{180-\angle DBC}{2} = 180$ de donde $\angle COD = 180 - \frac{180-60}{2} = 120$.

$\square$

**Solución 3**

Sea $n = k^2 + x$ donde $0 \leq x \leq 2k$.
Veamos que

$$\left\lfloor n + \sqrt{n} + \frac{1}{2} \right\rfloor = k^2 + x + \left\lfloor \sqrt{k^2 + x} + \frac{1}{2} \right\rfloor \tag{1}$$

**Caso 1:** $0 \leq x \leq k$
Es fácil ver que $k \leq \sqrt{k^2 + x} < k + \frac{1}{2}$, de donde $\left\lfloor n + \sqrt{n} + \frac{1}{2} \right\rfloor = k^2 + x + k$, pero

$$k^2 < k^2 + x + k \leq k^2 + 2k < (k+1)^2$$

de donde $\left\lfloor n + \sqrt{n} + \frac{1}{2} \right\rfloor$ no puede ser cuadrado perfecto.

**Caso 2:** $k + 1 \leq x \leq 2k$
Es fácil ver que $k+1 > \sqrt{k^2 + x} > k + \frac{1}{2}$, de donde $\left\lfloor n + \sqrt{n} + \frac{1}{2} \right\rfloor = k^2 + x + k + 1$, pero

$$(k+1)^2 < k^2 + 2k + 2 \leq k^2 + x + k + 1 \leq k^2 + 3k + 1 < (k+2)^2$$

de donde $\left\lfloor n + \sqrt{n} + \frac{1}{2} \right\rfloor$ no puede ser cuadrado perfecto tampoco en este caso. $\square$