Prueba 15.

Problem 1 (Clásico)**.** *Encuentra todos los enteros positivos a, b para los que $a^4 + 4b^4$ es primo.*

Problem 2 (Checa-Polaca junior 2019)**.** *En un grupo de niños cada uno tiene exactamente d amigos y cada par de niños que no son amigos tienen exactamente un amigo en común. Prueba que hay como mucho $d^2 + 1$ niños en el grupo.*

Problem 3 (Olimpiada francófona 2020)**.** *Sea ABC un triángulo $AB < AC$, ω es el incírculo y Γ es el circuncírculo. Sea también ω_b el excírculo relativo al vértice B y B' el punto de tangencia entre ω_b y AC. De manera similar, sea ω_c el excírculo relativo al vértice C y C' el punto de tangencia entre ω_c y AB. Finalmente, sea I el centro de ω y X el punto de Γ tal que $\angle XAI$ es recto. Prueba que los triángulos XBC' y XCB' son iguales.*

Soluciones

Solución 1

Sea $a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2)^2 - 4a^2b^2 = (a^2 - 2ab + 2b^2)(a^2 + 2ab + 2b^2)$. De donde para que esa cantidad sea primo el menor de estos dos factores tiene que ser igual a 1. Ahora $a^2 - 2ab + 2b^2 = (a - b)^2 + b^2$, como a y b son enteros positivos la única posible solución es $a = b = 1$ que además cumple la condición deseada. $\square$

Solución 2

Sea N el conjunto de todos los niños, sea a un niño cualquiera y sean $B = \{b_1, b_2, \ldots b_d\}$ sus amigos. Sean ahora $X_{b_1}, X_{b_2}, \ldots, X_{b_d}$ los conjuntos formados por los amigos de los $\{b_i\}$ quitando a, o sea $|X_{b_i}| = d - 1$, estos conjuntos no tienen por qué ser disjuntos.
Supongamos que existe un niño que no pertenece ni a B ni a ningún X_{b_i}. Este niño no tiene ningún amigo común con a, contradicción, de donde

$$N = a \cup B \cup X_{b_1} \cup X_{b_2} \cdots \cup X_{b_d}$$

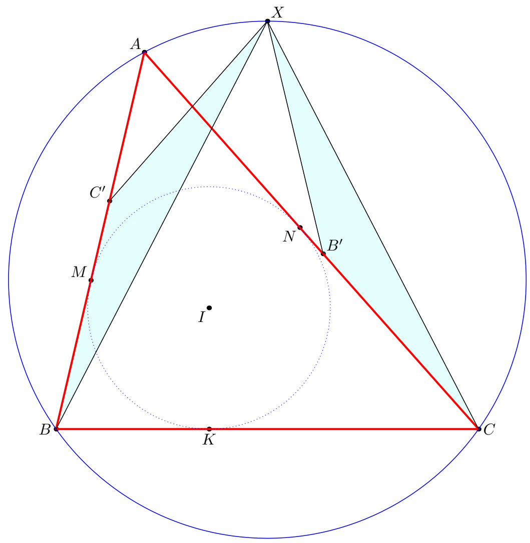
lo que implica que

$$|N| \leq 1 + d + d(d - 1) = d^2 + 1$$

ya que $|X_{b_i}| = d - 1$. $\square$

Solución 3

Sean M, N, K los puntos de contacto del incírculo.



- Sabemos que como B' y C' son los puntos de contactos de las circunferencias exinscritas, entonces $BC' = MA = NA = CB'$.

- Si $\angle XAI = 90$ esto implica que $\angle XAC = \angle B/2 + \angle C/2$ de donde X es el punto medio del arco BAC, lo que implica que $XB = XC$.

- Por último $\angle XBC' = \angle XCB'$ por estar inscritos en el arco AX.

La igualdad de los triángulos se deduce de los 3 hechos anteriores. $\square$