Prueba 14.

Problem 1 (IMO longlist 1980)**.** *Dos circunferencias C_1 y C_2 son tangentes externamente en P. La recta ℓ es tangente en A a C_2 y corta a C_1 en B y C con B entre A y C. Prueba que la recta PA es bisectriz exterior del $\angle BPC$.* ***Hint:*** *Inversión en C.*

Problem 2 (AoPS)**.** *Encuentra todos los polinomios $P(x)$ con coeficientes reales tales que*

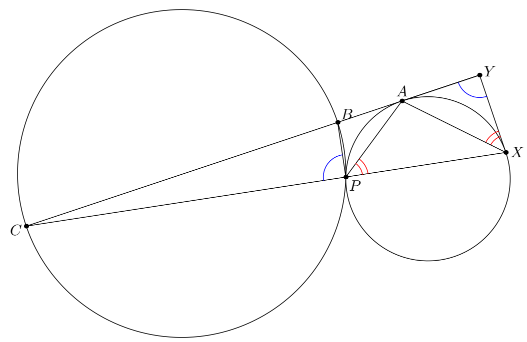
$$xP\left(x+1\right) = (x+2)P\left(x\right) - x$$

Problem 3 (Rusia 1996)**.** *Considera un tablero de 5×7 y $L-$trominos que son piezas de 2×2 con una esquina de menos. Determinar si es posible cubrir dicho tablero con L-trominos, con varias capas, de modo tal que cada casilla del tablero está cubierta por la misma cantidad de $L-$ trominos.*

Soluciones

Solución 1

Sea $X = CP \cap C_2$, sea ϕ la inversión centrada en C de radio CA y sea $Y = \phi(B)$.



- C_2 se conviert en ella misma, o sea, $\phi(C_2) = C_2$. Además $\phi(A) = A$ y $\phi(P) = X$.
- C_1 se convierte en una recta que pasa por X y es tangente a C_2, o sea, YX es tangente a C_2 en X.
- El resto es trabajo con ángulos. $BYXP$ es cíclico de donde $\angle BPC = \angle BYX$ además $\angle APX = \angle AXY$, de donde

  $$180 = \angle BPC + \angle BPA + \angle APX = \angle AYX + \angle YXA + \angle XAY$$

  que implica que

  $$\angle BPA = \angle XAY = \angle YXA = \angle XPA$$

$\square$

Solución 2

Haciendo $x = 0$ vemos que $P(0) = 0$, y haciendo $x = -1$ vemos que $P(-1) - (-1) = 0$ de donde 0 y -1 son raíces de $P(x) - x$.
Sea entonces

$$P(x) - x = x(x+1)Q(x)$$

donde $Q(x)$ es un polinomio con coeficientes reales. Sustituyendo en la ecuación original y simplificando obtenemos que $Q(x+1) = Q(x)$ para todo x lo que implica que Q es constante. Demuéstrenlo!!!
Tenemos entonces que $P(x) = cx(x+1) + x$. Se comprueba fácilmente que esta familia de polinomios satisface la ecuación inicial. $\square$

Solución 3

Consideremos la siguiente coloración:

A	B	A	B	A	B	A
C	D	C	D	C	D	C
A	B	A	B	A	B	A
C	D	C	D	C	D	C
A	B	A	B	A	B	A

Supongamos que tenemos un cubrimiento donde cada casilla es cubierta por x $L-$trominos y que se usaron en total k $L-$trominos.

- Cada $L-$tromino cubre tres casillas, de donde $35x = 3k$, lo que implica que $x = 3l$ y sustituyendo tenemos que $35l = k$.

- Por otra parte un $L-$tromino cubre exactamente 3 colores distintos, de donde para cada una de las 12 casillas marcadas con el color A fueron usados $12x = 12 \cdot 3l = 36l$ $L-$trominos, contradicción.

$\square$