Prueba 13.

Problem 1 (Argentina Cono Sur tst 2013)**.** *Prueba que el número* $N = \underbrace{44\ldots4}_{n}\underbrace{88\ldots8}_{n}-1\underbrace{33\ldots3}_{n-1}2$ *es un cuadrado perfecto para todo entero positivo* n*.*

Problem 2 (Alemania tst 2004)**.** *Sea* ABC *un triángulo acutángulo, sean* M *y* N *dos puntos en la recta* AC *tal que* $MN = AC$*. Sea* X *la proyección de* M *en* BC *y sea* Y *la proyección de* N *en* AB*. Finalmente, sea* H *el ortocentro de* $\triangle ABC$*. Prueba que los puntos* B*,* X*,* H*,* Y *son concíclicos.*
Hint: $MX \cap NY$**.**

Problem 3 (Argentina Cono Sur tst 2013)**.** *Sea* ℓ *una recta del plano,* 1390 *puntos están dispuestos en el plano de modo tal que la distancia a* ℓ *de cada uno de ellos es a lo sumo* 1*cm y la distancia entre dos de ellos es mayor que* 2*cm. Demuestra que hay al menos un par de puntos cuya distancia entre ellos es mayor que* 1000*cm.*

Soluciones

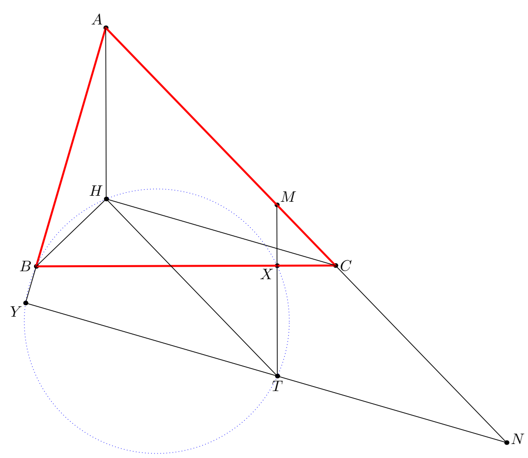
Solución 1

$$
\begin{aligned}
N &= \frac{10^n-1}{9}\cdot 4\cdot 10^n + \frac{10^n-1}{9}\cdot 8 - (10^n + \frac{10^{n-1}-1}{9}\cdot 3\cdot 10 + 2) \\
&= \frac{4\cdot 10^{2n} - 8\cdot 10^n + 4}{9} \\
&= (\frac{2}{3}(10^n-1))^2
\end{aligned}
$$

$\square$

Solución 2

Sea $T = MX \cap NY$.



- $MT \parallel AH$,$NT \parallel$ y $AC = MN$ implican que $\triangle AHC = \triangle MTN$, de donde $AHTM$ es un paralelogramo.
- De lo anterior se deduce que $\angle HTX = \angle XMC = 90 - \angle ACB = \angle CBH$, de donde $BHXT$ es cíclico.
- Finalemente $BXTY$ es obviamente cíclico de donde $BHXTY$ es cíclico lo que demuestra el resultado.

$\square$

Solución 3

Sea $\{X_i\}$ los puntos y $\{P_i\}$ las respectivas proyecciones sobre ℓ, para $i = 1, 2, \ldots, 1390$. Asumimos que los $\{P_i\}$ están en orden en la recta ℓ, siendo d la distancia entre P_1 y P_{1390}.

Veamos que si trazamos circulos unitarios centrados en los $\{X_i\}$ dichos circulos son disjuntos porque la distancia entre cualesquiera dos de los centros es mayor que 2.

Por otra parte los $\{X_i\}$ están contenidos en un rectángulo de largo d y de ancho 2, lo que implica que los circulos anteriores están contenidos enun rectángulo de largo $d + 2$ y ancho 4.

Luego usando un argumento de superficie:

$$1390\pi \leq 4(d + 2)$$

de donde

$$d \geq \frac{1390\pi}{4} - 2 > \frac{1390(3)}{4} - 2 = 1042.5 - 2 > 1000.$$

Por Pitágoras d es mayor que la distancia entre X_1 y X_{1390}. $\square$