Prueba 12.

Problem 1 (Panafrica 2016)**.** *Para cada entero positivo n definimos $P(n)$ como:*

$$P(n) = n(n+1)(2n+1)(3n+1)...(16n+1).$$

Encuentre el máximo común divisor de los números $P(1)$, $P(2)$, $P(3), ..., P(2016)$.

Problem 2 (Canadá 1996)**.** *Si α, β, y γ son las raíces de $x^3 - x - 1 = 0$, calcula*

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{1+\gamma}{1-\gamma}.$$

Problem 3 (EGMO 2019)**.** *Sea ABC un triángulo con incentro I. La circunferencia que pasa por B y es tangente a AI en I corta a AB de nuevo en P. La circunferencia que pasa por C y es tangente a AI en I corta a AC de nuevo en Q. Prueba que PQ es tangente al incirculo de ABC.*
Hint: *Potencia de puntos y excentro.*

Soluciones

Solución 1

- Sea $d = gcd(P(1), P(2), P(3), \ldots, P(2016))$. Como $P(1) = 17!$ tenemos que $d = 2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d \times 11^e \times 13^f \times 17^g$.

- Veamos que si p es primo $p|P(p)$ pero $p^2 \nmid P(p)$, lo que implica que en la expresión de d todos los exponentes son menores o iguales que 1.

- Sea $p < 16$ primo. Probemos que $p|P(i)$ para todo $i = 1, 2, 3, \ldots 2016$. Si $p|i$ es obvio. Ahora si $p \nmid i$ en el conjunto

$$\{i+1, 2i+1, 3i+1, \ldots pi+1\}$$

  hay al menos un elemento divisible por p, de lo contrario por PHP habría dos restos iguales, o sea, existirían $1 \leq m < n \leq p$ tal que

$$p|ni + 1 - (mi + 1) \Rightarrow p|(n-m)i$$

  lo cual es imposible.

- el caso $p = 17$ es similar, si $17|i$ entonces $17|P(i)$, en caso contrario en el conjunto

$$\{i+1, 2i+1, 3i+1, \ldots 16i+1\}$$

  Si hay dos restos iguales se concluye como en el paso anterior y si todos los restos son distintos y distintos de cero consideramos la suma

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + 16 = 17 \cdot 8 &\equiv (i+1) + (2i+1) + \ldots (16i+1) \\ &\equiv 17 \cdot 8 \cdot i + 16 \pmod{17} \end{aligned}$$

  Contradicción.

- Se concluye que $d = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17$.

$\square$

Solución 2

Sea, $f(x) = x^3 - x - 1$ y $S = \frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{1+\gamma}{1-\gamma}$. Sabemos que $f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ y por Vietta:

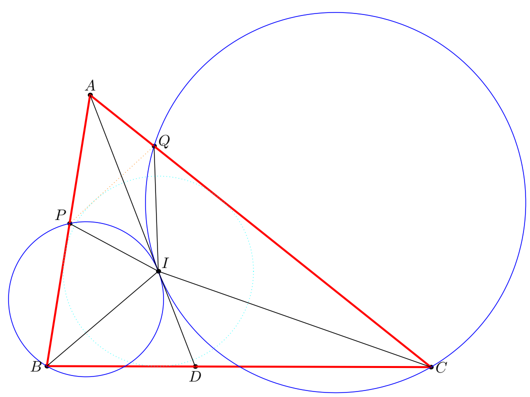
- $\alpha + \beta + \gamma = 0$
- $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = -1$

Ahora,

$$\begin{aligned}
S + 3 &= \frac{2}{1-\alpha} + \frac{2}{1-\beta} + \frac{2}{1-\gamma} \\
&= 2\Big(\frac{(1-\beta)(1-\gamma) + (1-\alpha)(1-\gamma) + (1-\alpha)(1-\beta)}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}\Big) \\
&= 2\Big(\frac{3 - 2(\alpha+\beta+\gamma) + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)}{f(1)}\Big) \\
&= 2\frac{3-1}{-1}
\end{aligned}$$

De donde $S = -7$. $\square$

Solución 3



En la figura, por potencia de puntos $AP \cdot AB = AI^2 = AQ \cdot AC$ de donde $PQCB$ es cíclico.
Ahora $\angle AQP = \angle ABC$ y

$$\angle IQC = \angle DIC = \angle BAC/2 + \angle ACB/2$$

de esta forma

$$
\begin{aligned}
\angle IQP &= 180 - (\angle AQP + \angle IQC) \\
&= 180 - (\angle ABC + \angle BAC/2 + \angle ACB/2) \\
&= 90 - \angle ABC/2 \\
&= \angle BAC/2 + \angle ACB/2
\end{aligned}
$$

Conclusión IQ es bisectriz de $\angle PQC$. Análogamente IP es bisectriz de $\angle QPB$ de donde I es el A-excentro del $\triangle APQ$ y la A-exinscrita coincide con el incírculo de $\triangle ABC$ lo que implica el resultado. $\square$