Prueba 11.

Problem 1 (España 2004). *Encuentra todas las funciones* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *tales que*

$$f(x + f(y)) = f(x) - y$$

para todos $x, y \in \mathbb{Z}$.

Problem 2 (Kosovo 2019). *Encuentra todas las funciones* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tales que*

$$f(xy + f(x)) = xf(y)$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

Problem 3 (EGMO 2012). *Encuentra todas las funciones* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tales que*

$$f\left(yf(x + y) + f(x)\right) = 4x + 2yf(x + y)$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

Soluciones

Solución 1

Sea $P(x, y)$ la identidad dada.

- $P(0, y) \Rightarrow f(f(y)) = f(0) - y$ de donde f es biyectiva. Demuéstrenlo!!!.
- $P(0, 0) \Rightarrow f(f(0)) = f(0)$ por la inyectividad $f(0) = 0$.
- $P(0, y) \Rightarrow f(f(y)) = -y$.
- $P(0, f(y)) \Rightarrow f(x - y) = f(x) - f(y)$ y haciendo $x = a + b$ e $y = b$ obetenemos que $f(a) + f(b) = f(a + b)$.

Conclusión f cumple con la ecuación de Cauchy, como estamos en el dominio de los enteros $f(x) = cx$, cuando sustituimos en la identidad dada llegamos a que

$$cx + c^2y = cx - y \Rightarrow c^2 = -1$$

De donde no existe ninguna función que cumple la condición dada. $\square$

Solución 2

Sea $P(x, y)$ la identidad dada.
$P(x, 0) \Rightarrow f(f(x)) = xf(0)$ de donde si $f(0) \neq 0$ entonces f es biyectiva. Analicemos dos casos.

Caso 1: $f(0) \neq 0$.

Sabemos que $f(f(x)) = xf(0)$ de donde f es biyectiva. $P(1, y) \Rightarrow f(y + f(1)) = f(y)$ y de la inyectividad deducimos que $f(1) = 0$. De donde $P(x, 1) \Rightarrow f(x + f(x)) = xf(1) = 0 = f(1)$ y de la inyectividad sabemos que

$$x + f(x) = 1 \Rightarrow f(x) = 1 - x$$

Se comprueba fácilmente que es solución.

Caso 2: $f(0) = 0$.

$P(x, 0) \Rightarrow f(f(x)) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ de donde la doble aplicación de f es la función nula. Aplicando f en la identidad original obtenemos $0 = f(f(xy + f(x))) = f(xf(y))$, de donde si $f(y) \neq 0$ entonces tomamos $x = \frac{y}{f(y)}$ y tenemos que $0 = f(\frac{y}{f(y)} f(y)) = f(y) \neq 0$, contradicción de donde $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ que también se comprueba que es solución. $\square$

Solución 3

- $P(x, 0) \Rightarrow f(f(x)) = 4x$ de donde f es biyectiva.
- $P(0, 0) \Rightarrow f(f(0)) = 0 \Rightarrow f(f(f(0))) = f(0)$.
- $P(f(0), 0) \Rightarrow f(f(f(0))) = 4f(0)$, combinado con el anterior $f(0) = 0$.
- $P(0, x) \Rightarrow f(xf(x)) = 2xf(x)$.
- $P(1, 0) \implies f(f(1)) = 4$ y $P(0, 1) \implies f(f(1)) = 2f(1)$ de donde $f(1) = 2$ y $f(2) = 4$.
- $P(x, 1 - x)$ implica que $f(2 - 2x + f(x)) = 4$ usando inyectividad tenemos que $2 - 2x + f(x) = 2$ y se deduce que $\boxed{f(x) = 2x}$ es la única candidata a solución.

Se comprueba fácilmente que en efecto es solución. $\square$