# Prueba 10.

**Problem 1.** *En cierta red social hay un grupo(A) formado por* $120$ *personas y otro grupo(B) formado por* $10$ *celebridades. Estadísticas muestran que cada celebridad del grupo* $B$ *tiene al menos* $82$ *seguidores en el grupo* $A$*. Prueba que existen dos personas del grupo* $A$ *tal que entre las* $2$ *son seguidores de las* $10$ *celebridades de* $B$*.*

**Problem 2.** *En cierta aula hay* $25$ *estudiantes. Se realiza el examen final con varias preguntas donde cada pregunta tiene* $5$ *posibles respuestas. Cada pareja de estudiantes coincide a lo sumo en una respuesta. Prueba que en dicho examen no hay más de* $6$ *preguntas.*

**Problem 3.** *En un festival de teatro participan* $12$ *actores. El festival consiste en* $n$ *actuaciones distintas. En cada actuación participaron exactamente* $6$ *actores y cada par de actuaciones tiene como mucho* $2$ *actores en común, Determina el máximo valor posible de* $n$*.*

# Soluciones

### Solución 1

En la siguiente matriz tenemos una columna para cada celebridad de $B$ y una fila para cada persona de $A$.

$$M = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} c_1 & c_2 & \cdots & c_{10} \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_120 \end{array} & \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,10} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,10} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{120,1} & a_{120,2} & \dots & a_{120,10} \end{bmatrix} \end{array}$$

La entrada $a_{i,j}$ toma el valor 1 si $s_i$ NO es seguidor de $c_j$ y cero en otro caso. De esta forma definimos $x_j = \sum_{i=1}^{120} a_{i,j}$ la suma por columnas que representa el total de personas de $A$ que NO son seguidoras de $c_j$ de donde $x_j \leq 38$ para todo $j = 1, 2, \dots, 10$, puesto que cada celebridad tiene más de 82 seguidores.

En la siguiente matriz tenemos una columna para cada celebridad y una fila para cada pareja de personas de $A$.

$$N = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} c_1 & c_2 & \cdots & c_{10} \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1 s_2 \\ s_1 s_3 \\ \vdots \\ s_{119} s_{120} \end{array} & \begin{bmatrix} a_{(1,2),1} & a_{(1,2),2} & \dots & a_{(1,2),10} \\ a_{(1,3),1} & a_{(1,3),2} & \dots & a_{(1,3),10} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{(119,120),1} & a_{(119,120),2} & \dots & a_{(119,120),10} \end{bmatrix} \end{array}$$

La entrada $a_{(i,j),k}$ toma el valor 1 cuando ni $s_i$ ni $s_j$ son seguidores de $c_k$ y cero en otro caso. Sea $S(N)$ la suma de las entradas de $N$.

Supongamos que ninguna pareja sigue a las 10 celebridades $(*)$. Esto implica que la suma de cada fila es mayor o igual que 1 . Lo que implica, sumando por filas, que

$$S(N) \geq \binom{120}{2} = 7140. \tag{1}$$

Por otra parte cada par de 1$s$ en una columna de la matriz genera exactamente un 1 en la matriz $N$. De donde, sumando por columnas,

$$S(N) = \binom{x_j}{2} \leq 10\binom{38}{2} = 7030$$

lo que contradice (1), de donde $(*)$ es FALSO. $\square$

**Solución 2**

En la siguiente matriz tenemos una columna para cada problema y una fila para cada pareja de estudiantes.

$$N = \begin{array}{c} \\ e_1e_2 \\ e_1e_3 \\ \vdots \\ e_{24}e_{25} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} p_1 & p_2 & \cdots & c_n \end{array} \\ \left[ \begin{array}{cccc} a_{(1,2),1} & a_{(1,2),2} & \cdots & a_{(1,2),n} \\ a_{(1,3),1} & a_{(1,3),2} & \cdots & a_{(1,3),n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{(24,25),1} & a_{(24,25),2} & \cdots & a_{(24,25),n} \end{array} \right] \end{array}$$

La entrada $a_{(i,j),k}$ toma el valor 1 cuando $e_i$ y $e_j$ tienen la misma respuesta para el problema $p_k$ y cero en otro caso. Sea $S(N)$ la suma de las entradas de $N$.

Fijamos el problema $p_k$. Supongamos que $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5$ son tales que $r_i$ estudiantes dieron a $p_k$ la $i$-ésima respuesta de las 5 posibles. Lo primero es que $\sum r_i = 25$. Además cuando dos estudiantes coinciden en la respuesta eso genera un 1 en la $k$-ésima columna de $N$. De donde la suma de $k$-ésima columna de $N$ es

$$\binom{r_1}{2} + \binom{r_2}{2} + \cdots \binom{r_5}{2} = \frac{\sum r_i^2 - \sum r_i}{2}$$

Por Cauchy-Schwartz sabemos que $\sum r_i^2 \geq 125$. Demuéstrenlo!!!
De donde la suma de la $k$-ésima columna es mayor o igual que 50, lo que implica que

$$S(N) \geq 50n. \tag{2}$$

Por otra parte cada pareja de estudiantes coincide en a lo sumo una respuesta lo que implica que la suma de cada fila de $N$ es a lo sumo 1, de donde

$$S(N) \leq \binom{25}{2}.$$

Combinando con (2) obtenemos que $n \leq 6$. $\square$

**Solución 3**

En la siguiente matriz tenemos una columna para cada actor y una fila para cada pareja de actuanciones(performances).

$$N = \begin{array}{c} \\ p_1p_2 \\ p_1p_3 \\ \vdots \\ p_{n-1}p_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & \dots & a_{12} \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{(1,2),1} & a_{(1,2),2} & \cdots & a_{(1,2),12} \\ a_{(1,3),1} & a_{(1,3),2} & \cdots & a_{(1,3),12} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{(n-1,n),1} & a_{(n-1,n),2} & \cdots & a_{(n-1,n),12} \end{bmatrix} \end{array}$$

La entrada $a_{(i,j),k}$ toma el valor 1 cuando el actor $a_k$ actuón en las performances $p_i$ y $p_j$, y cero en otro caso. Sea $S(N)$ la suma de las entradas de $N$.
Cada pareja de performances tiene como mucho 2 actores en común lo que implica que la suma de cada fila de $N$ es a lo sumo 2, de donde

$$S(N) \leq 2\binom{n}{2}. \tag{3}$$

Sea $x_j$ la cantidad de performances en las que participó el actor $a_j$, $j = 1, 2, \dots 12$. Esto genera $\binom{x_j}{2}$ $1s$ en la $j-$ésima columna de $N$ , de donde

$$S(N) = \binom{x_1}{2} + \binom{x_2}{2} + \cdots + \binom{x_{12}}{2}.$$

Además, como en cada performance actuaron 6 actores $\sum x_j = 6n$. Usando la desigualdad de Jensen como $\binom{\cdot}{2}$ es convexa tenemos que

$$S(N) = \binom{x_1}{2} + \binom{x_2}{2} + \cdots + \binom{x_{12}}{2} \geq 12\binom{\frac{\sum x_j}{12}}{2} = 12\binom{\frac{6n}{12}}{2}. \tag{4}$$

Como $\frac{6n}{12}$ no siempre es entero tenemos 2 casos.

Caso 1: $n = 2k$. (4) se transforma en

$$S(N) = \binom{x_1}{2} + \binom{x_2}{2} + \cdots + \binom{x_{12}}{2} \geq 12\binom{\frac{\sum x_j}{12}}{2} = 12\binom{k}{2}.$$

Combinando esto último con (3) tenemos que $k \leq 2$ de donde $n \leq 4$.

Caso 2: $n = 2k+1$. (4) discretizando se transforma en

$$S(N) = \binom{x_1}{2} + \binom{x_2}{2} + \cdots + \binom{x_{12}}{2} \geq 12\binom{\frac{\sum x_j}{12}}{2} = 6\binom{k+1}{2} + 6\binom{k}{2}.$$

Combinando esto último con (3) tenemos que $k \leq 1$ de donde $n \leq 3$.

En cualquier caso hemos llegado a que $n \leq 4$. Para concluir que es máximo necesitamos una distribución para 4 performances que cumpla las condiciones del problema.

$$\begin{aligned} p_1 &= [1,4,6,7,9,10] \\ p_2 &= [1,2,5,7,11,12] \\ p_3 &= [2,3,5,8,9,10] \\ p_4 &= [3,4,6,8,11,12] \end{aligned}$$

$\square$