Polinomios.

Héctor Raúl Fernández Morales
10001noesprimo@gmail.com

Marzo, 2021

En este documento intentamos cubrir, aunque sin entrar en profundidad, las técnicas más comunes para atacar problemas de polinomios. Solo analizaremos polinomios en una variable.

Contents

1 Introducción **1**

2 Propiedades Generales **2**
2.1 Problemas resueltos. 4

3 Polinomios con coeficientes enteros **5**
3.1 Problemas Resueltos 8

4 Consejos **10**

5 Para ir más allá **10**

6 Lista de Problemas **11**

1 Introducción

Un **monomio** en la variable x es una expresión de la forma cx^k, donde c es una constante y k un entero no negativo. La constante c puede ser entera, racional, real o compleja. Un **polinomio** en x es una suma finita de monomios en x. En otras palabras, una expresión de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Las constantes $a_0, a_1 \ldots, a_n$ se denominan **coeficientes** de P. El conjuntos de polinomios con coeficientes en A se denota por $A[x]$, por ejemplo, $\mathbb{Z}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$. Siempre que $a_n \neq 0$ podemos decir que n es el **grado** del polinomio P. Los polinomios de grado 1 son llamados lineales(rectas), los de grado 2 son llamados cuadráticos(parábolas), y los de grado 3 cúbicos. Si $a_n = 1$ el polinomio se dice **mónico**.
Las operaciones entre polinomios se definen como

$$A(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \qquad B(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$$
$$A(x) \pm B(x) = (a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1)x \ldots$$
$$A(x)B(x) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + \cdots + (a_n b_m)x^{n+m}$$

2 Propiedades Generales

Denotamos por $\deg P$ el grado del polinomio P.

Lema

Si P y Q son dos polinomios:

- $\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$, con igualdad cuando $\deg P \neq \deg Q$.
- $\deg(P \cdot Q) = \deg P + \deg Q$.

Teorema

Dados dos polinomios P y $D \neq 0$, existen dos únicos polinomios Q y R tales que

$$P(x) = D(x)Q(x) + R(x)$$

con $\deg R < \deg D$.

Decimos que un polinomio A es divisible por B si el resto cuando a es dividido por B es cero.

Teorema: Bezout

El polinomio $P(x)$ es divisible por $(x-a)$ si y solo si $P(a) = 0$.

El número a es **raiz** o **cero** del polinomio P si $P(a) = 0$ o equivalentemente $(x-a)|P(x)$. Determinar los ceros de un polinomio P es equivalente a resolver la ecuación $P(x) = 0$.

Teorema

Si el polinomio P es divisible por el polinomio Q entonces todo cero de Q es cero de P.

Teorema: Teorema fundamental del álgebra

El polinomio $P(x)$ de grado n con coeficientes complejos tiene exactamente n raíces(no necesariamente distintas). Dicho polinomio tiene una única factorización:

$$P(x) = a(x-r_1)(x-r_2)\ldots(x-r_n).$$

Entre las muchas consecuencias de este gran resultado tenemos que si dos polinomios de grado n toman el mismo valor en $n+1$ puntos entonces son iguales. Si dichos polinomios son mónicos entonces con n puntos es suficiente. El lector podrá comprobar esto considerando el polinomio resultante de la diferencia de ambos polinomios.

Teorema: Fórmulas de Vieta

Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ un polinomio con coeficientes complejos y raíces $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = (-1)\frac{a_{n-1}}{a_n}; \qquad \sum_{i<j} r_i r_j = (-1)^2 \frac{a_{n-2}}{a_n}; \qquad r_1 r_2 \cdots r_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Teorema: Fórmulas de interpolación de Lagrange

Para toda colección de números complejos distintos $x_0, \ldots, x_n$ y cualesquiera números complejos $y_0, \ldots, y_n$, existe un **único** $P(x)$ de grado menor o igual que n tal que para todo $0 \leq i \leq n$, $P(x_i) = y_i$, y este polinomio es

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}.$$

Teorema

Si z es raiz de $P \in \mathbb{R}[x]$ entonces $\bar{z}$ también es raiz de P.

Como consecuencia de lo anterior tenemos que las raices complejas de un polinomio con coeficicentes reales vienen en pares. Por tanto todos los polinomios de grado impar tienen al menos una raiz real. Además vemos que

$$(x - z)(x - \bar{z}) = x^2 - (z + \bar{z})x + z\bar{z} \in \mathbb{R}[x]$$

y deducimos que todos los polinomios con coeficientes reales se pueden factorizar usando polinomios con coeficientes reales de grado 1 y 2.

Teorema: Teorema del valor medio

Sea f una función continua en $[a, b]$ tal que $f(a) \neq f(b)$. Entonces para todo $u \in [\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\}]$ existe al menos un c en $[a, b]$ tal que $f(c) = u$.

Remark

Como consecuencia del **teorema de Weierstrass** sabemos que el resultado anterior se puede generalizar a cualquier $u \in [\min_{x\in[a,b]} f(x), \max_{x\in[a,b]} f(x)]$

2.1 Problemas resueltos.

Problem 1. *[USAMO 1975] Si $P(x)$ es un polinomio de grado n tal que $P(k) = \frac{k}{k+1}$ for $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Determina $P(n+1)$.*

Solution. Sea $Q(x) = P(x)(x+1) - x$, de esta forma $0, 1, 2, \ldots, n$ son ceros de Q. Entonces, $Q(x) = ax(x-1)(x-2)\ldots(x-n)$.
Haciendo $x = -1$ obtenemos que $a = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$. Evaluando obtenemos que $P(n+1) = 1$ si n es impar y $P(n+1) = \frac{n}{n+2}$ si n es par. $\square$

Problem 2. *[Clásico] Sean $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ los ceros distintos de 1 del polinomio $P(x) = x^n - 1$, $n \geq 2$. Prueba que*

$$\frac{1}{1-x_1} + \frac{1}{1-x_2} + \cdots + \frac{1}{1-x_{n-1}} = \frac{n-1}{2}.$$

Solution. Para $i = 1, 2, \ldots, n-1$, sean $a_i = 1 - x_i$ y sea

$$Q(x) = \frac{P(1-x)}{x} = \frac{(1-x)^n - 1}{x}$$

entonces,

$$Q(x) = (-1)^n x^{n-1} + (-1)^{n-1}\binom{n}{1}x^{n-2} + \cdots + \binom{n}{2}x - \binom{n}{1}$$

Veamos que los a_i son las raíces de Q,

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x_1} + \frac{1}{1-x_2} + \cdots + \frac{1}{1-x_{n-1}} &= \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{1-a_{n-1}} \\ &= \frac{a_2a_3\cdots a_{n-1} + a_1a_3\cdots a_{n-1} + \cdots + a_1a_2\cdots a_{n-2}}{a_1a_2\cdots a_{n-1}}\end{aligned}$$

usando las fómulas de Vieta

$$\frac{1}{1-x_1} + \frac{1}{1-x_2} + \cdots + \frac{1}{1-x_{n-1}} = \frac{-\binom{n}{2}}{-\binom{n}{1}} = \frac{n-1}{2}$$

$\square$

Problem 3. *[USAMO 2002] Prueba que todo polinomio mónico de grado n con coeficientes reales es el promedio de dos polinomios mónicos de grado n con n raíces reales.*

Solution. Sea f un polinomio mónico y sea $M > 2\max_{t=1,\ldots,n}|f(t)|$. Podemos escoger reales $a_1, \ldots, a_n$ y $b_1, \ldots, b_n$ tales que para todo $k = 1, \ldots, n$, tenemos

$$\begin{aligned}a_k + b_k &= 2f(k) \\ (-1)^k a_k &> M \\ (-1)^{k+1} b_k &> M.\end{aligned}$$

Sean g y h los polinomios que interpolan los puntos (k, a_k) y (k, b_k). Debido a los cambios de signos estos polinomios tienen $n-1$ raíces reales por tanto tienen n raíces reales. Además $\frac{1}{2}(g+h)$ es mónico al igual que f y coinciden en n puntos de donde son iguales. $\square$

3 Polinomios con coeficientes enteros

Si consideramos el polinomio con coeficientes enteros $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, entonces

$$P(x) - P(y) = a_n(x^n - y^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - y^{n-1}) + \cdots + a_2(x^2 - y^2) + a_1(x - y)$$

donde todos los sumandos son múltiplos de $(x-y)$.

Teorema

Si P es un polinomio con coeficientes enteros, entonces $P(a) - P(b)$ es divisible por $a - b$. En particular, todas las raíces de P dividen a $P(0)$.

Teorema

Si $\frac{p}{q}(p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0, mcd(p, q) = 1)$ es raiz de $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ con coeficientes enteros, entonces $p|a_0$ y $q|a_n$.

Un polinomio se dice reducible si puede ser factorizado como producto de dos polinomios de grado positivo, en caso contrario se dice **irreducible**.

Teorema: Criterio de Eisenstein

Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ un polinomio con coeficientes enteros y sea p primo tal que

- p divide a $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$.
- $p \nmid a_n$.
- $p^2 \nmid a_0$.

Entonces $P(x)$ es irreducible.

Teorema: Criterio de Eisenstein extendido

Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ un polinomio con coeficientes enteros y sea p primo tal que

- p divide a $a_0, a_1, \ldots, a_k$.
- $p \nmid a_{k+1}$.
- $p^2 \nmid a_0$.

Entonces $P(x)$ tiene un factor irreducible de grado mayor que k.

Proof. Sea $f(x) = g(x)h(x)$, donde $g(x) = g_r x^r + g_{r-1}x^{r-1} + \cdots + g_1 x + g_0$ y $h = h_s x^s + h_{s-1}x^{s-1} + \cdots + h_1 x + h_0$. Como a_0 tiene solo un factor p, sabemos que $p|g_0$ o $p|h_0$. Sin pérdida de generalidad asumamos que $p|g_0$ y $p \nmid h_0$. Entonces, sabemos que $a_1 \equiv g_0 h_1 + g_1 h_0 \equiv g_1 h_0 \equiv 0 \pmod p$. Esto implica $p|g_1$. De manera similar se comprueba que si $r \leq k$, $p|g_i$ para todo $0 \leq i \leq r$. Esto implica que $p|g(x)$, entoces $p|f(x)$. Esto último contradice el hecho de que $p \nmid a_{k+1}$. Por tanto, $r \geq k+1$. $\square$

Lema: Panaitopol

Sea $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ un polinomio con coeficientes enteros tal que

$$|a_{n-1}| > 1 + |a_{n-2}| + \cdots + |a_0|$$

Entonces exactamente un cero de de P satisface que $|z| > 1$ y los ceros restantes satisfacen que $|z| < 1$.

Proof. Podemos asumir que $a_0 \neq 0$, de lo contrario podemos quitar los fatores de la forma x^k. Supongamos que $|\alpha| = 1$ y que $P(\alpha) = 0$. Entonces tenemos que

$$-a_{n-1}\alpha^{n-1} = \alpha^n + a_{n-2}\alpha^{n-2} + \cdots + a_1\alpha + a_0$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} |a_{n-1}| = |-a_{n-1}\alpha^{n-1}| ge |\alpha^n + a_{n-2}\alpha^{n-2} + \cdots + a_1\alpha + a_0| \\ \geq |\alpha^n| + |a_{n-2}\alpha^{n-2}| + \cdots + |a_1\alpha| + |a_0| \\ = 1 + |a_{n-2}| + \cdots + |a_0| \end{aligned}$$

lo que contradice la desigualdad dada. Por tanto P no tiene raíces en la circunferencia unidad.
Denotemos ahora $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ las raíces de P. Como $|\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n| = |a_0| \geq 1$ sabemos que al menos una de las raíces de P está fuera del círculo unidad. Supongamos que $|\alpha_1| > 1$ y sea

$$Q(x) = x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0$$

el polinomio con raíces $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Entonces,

$$\begin{aligned}P(x) &= (x-\alpha_1)Q(x) \\ &= x^n + (b_{n-2}-\alpha_1)x^{n-1} + (b_{n-3}-b_{n-2}\alpha_1)x^{n-2} + \cdots (b_0 - b_1\alpha_1)x - b_0\alpha_1\end{aligned}$$

usando la desigualdad dada

$$\begin{aligned}|b_{n-2}| + |\alpha_1| \geq |b_{n-2}-\alpha_1| &= |a_{n-1}| \\ &> 1 + 1 + |a_{n-2}| + \cdots + |a_0| \\ &= 1 + |b_{n-3} - b_{n-2}\alpha_1| + \cdots |b_0 - b_1\alpha_1| + |b_0\alpha_1| \\ &\geq 1 + |b_{n-2}||\alpha_1| - |b_{n-3}| + |b_{n-3}||\alpha_1| - |b_{n-4}| + \cdots |b_1||\alpha_1| - |b_0| + |b_0||\alpha_1| \\ &= 1 + |b_{n-2}| + (|\alpha_1| - 1)(|b_{n-2}| + |b_{n-3}| + \cdots + |b_1| + |b_0|)\end{aligned}$$

de donde

$$1 > |b_{n-2}| + |b_{n-3}| + \cdots + |b_1| + |b_0|$$

Por tanto para todo α con $|\alpha| > 1$ tenemos que

$$\begin{aligned}|Q(\alpha)| &= |\alpha^{n-1} + b_{n-2}\alpha^{n-2} + \cdots + b_1\alpha + b_0| \\ &\geq |\alpha^{n-1}| - |b_{n-2}\alpha^{n-2}| + |b_{n-3}\alpha^{n-3}| - \cdots - |b_1\alpha| - |b_0| \\ &\geq |\alpha|^{n-1} - |\alpha|^{n-1}(|b_{n-2}| + |b_{n-3}| + \cdots + |b_1| + |b_0|) \\ &= |\alpha|^{n-1}(1 - |b_{n-2}| - |b_{n-3}| - \cdots - |b_1| - |b_0|) \\ &> 0\end{aligned}$$

□

Teorema: Criterio de Perron

Sea $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ un polinomio con coeficientes enteros con $a_0 \neq 0$ y

$$|a_{n-1}| > 1 + |a_{n-2}| + \cdots + |a_0|$$

Entonces $P(x)$ es irreducible.

Proof. Supongamos que $P(x) = f(x)g(x)$, el lema anterior nos dice que o bien f, o bien g, tiene todas sus raíces en el interior del círculo unidad, esto contradice que el valor absoluto del producto de dichas raíces es entero. □

Teorema: Lema de Schur

Sea $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ un polinomio no constante. Entonces existen infinitos primos que dividen a algun término de la sucesión $P(1), P(2), P(3) \ldots$

Proof. Si $P(0) = 0$ el resultado es obvio.
Supongamos que $P(0) = 1$. Existe M tal que $P(n) > 1$ para todo $n > M$. Veamos que $P(n!) \equiv 1 \pmod{n!}$ lo que implica que $p(n!)$ no es divisible por ningún primo menor que n, de esta forma conseguimos infinitos primos que dividen a al menos un miembro de la sucesión $p(1), p(2), \ldots$
Si $p(0) \neq 1$ consideramos $q(x) = \frac{p(xp(0))}{p(0)}$. □

3.1 Problemas Resueltos

Problem 4. *[IMO 1993] Sea $n > 1$ un entero y sea $f(x) = x^n + 5 \cdot x^{n-1} + 3$. Prueba que no existen polinomios $g(x), h(x)$, con coeficientes enteros y grado al menos 1, tales que $f(x) = g(x) \cdot h(x)$.*

Solution. Veamos que aplicando el criterio de Perron el problema es inmediato. Por otra parte, supongamos que

$$f(x) = g(x)h(x) = (g_r x^r + g_{r-1}x^{r-1} + ... + g_0)(h_s x^s + h_{s-1}x^{s-1} + ... + h_0)$$

Veamos que sin pérdida de generalidad podemos asumir que $3|g_0$ y $3 \nmid h_0$. Supongamos que $r \leq n-2$.
Claim: $3|g_r$. Veamos que $0 = g_0h_1 + g_1h_0$, de donde $3|g_1$. Procediendo por inducción fuerte, supongamos que $3|g_i$ para todo $i \leq k < r$. Veamos que $k+1 \leq r \leq n-2$ lo que implica que el coeficiente $k+1$ de f es 0, de esta forma

$$0 = g_{k+1}h_0 + g_kh_1 + \ldots g_1h_k + g_0h_{k+1}$$

usando al hipótesis de inducción llegamos a que $3|g_{k+1}$ y está probado el claim. Ahora, por el claim $3|g_r$ y $g_rh_s = 1$, contradicción de donde $r \geq n-1$.
Si $r = n$, f es irreducible. Si $r = n-1$ entonces $s = 1$ lo que implica que f tiene una raiz entera, lo cual es imposible, es fácil comprobar que ± 1, ± 3 no son raíces de f.

□

Problem 5. *[IMO 2002] Encuentra todos los pares de enteros positivos $m, n \geq 3$ para los cuales existen infinitos enteros positivos a tal que*

$$\frac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$$

es entero.

Solution. Consideremos la siguiente relación

$$x^m + x - 1 = (x^n + x^2 - 1)Q(x) + R(x)$$

con $\deg R < n$. Veamos que $\frac{R(x)}{x^n+x^2-1}$ es entero para infinitos valores de x lo cual solo es posible si $R \equiv 0$. De esta forma tenemos que encontrar los $m, n \geq 3$ tales que $x^n + x^2 - 1 | x^m + x - 1$ en el sentido polinomial.

Supongamos que $m \geq 2n$. Por el teorema del valor medio sabemos que hay una raíz de ambos polinomios en el intervalo $[0, 1]$, se α dicha raiz, ahora

$$1 - \alpha^2 = \alpha^n \Rightarrow (1 - \alpha^2)^2 = \alpha^{2n} \geq \alpha^m = 1 - \alpha$$

de donde

$$(1 - \alpha^2)^2 \geq 1 - \alpha \Leftrightarrow \alpha(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha - 1) \geq 0$$

pero esto último no es posible ya que

$$\alpha^2 + \alpha - 1 > \alpha^m + \alpha - 1 = 0$$

de esta forma $m < 2n$.
Veamos ahora que $x^n + x^2 - 1 | x^m + x - 1 \Leftrightarrow x^n + x^2 - 1 | x^{m-n+2} - x^{m-n} - x + 1$, de donde

$$n \leq m - n + 2 \leq 2n - 1 - n + 2 = n + 1$$

y tenemos dos casos.
Si $m - n + 2 = n$ entonces $x^n + x^2 - 1 | x^n + x^{n-2} - x + 1$ ambos polinomios tendría que ser iguales lo cual es imposible.
Si $m - n + 2 = n + 1$ entonces $x^n + x^2 - 1 | x^{n+1} + x^{n-1} - x + 1$ y $x^n + x^2 - 1 | x^{n+1} + x^3 - x$ restando obtenemos que

$$x^n + x^2 - 1 | x^3 + x^{n-1} - 1$$

de donde la única posibilidad es que $n = 3$ en cuyo caso $m = 5$.
Finalmente se comprueba que es solución ya que

$$(x^3 + x^2 - 1)(x^2 - x + 1) = x^5 + x - 1.$$

□

Problem 6. *[Ibero 2019] Sean $a_1, a_2, \ldots, a_{2019}$ enteros positivos y sea P un polinomio con coeficientes enteros tal que para todo entero positivo n,*

$$P(n) \text{ divide } a_1^n + a_2^n + \cdots + a_{2019}^n.$$

Prueba que P es constante.

Solution. Supongamos que P es no constante. Por el teorema de Schur sabemos que hay infinitos primos que dividen a algún elemento del conjunto $\{P(n) : n \in \mathbb{N}\}$. Sea p primo tal que $p > max\{2019, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ y tal que $p | P(a)$ para algún $a \in \mathbb{N}$.
Sabemos que p es primo realtivo con todos los $a_i s$, por el pequeño teorema de Fermat $a_i \equiv 1 \pmod{p}$. Además

$$m \equiv a \pmod{p} \Rightarrow m = a + np \Rightarrow a + np - a | P(a + np) - P(a) \Rightarrow p | P(m).$$

Por el teorema chino de los restos podemos seleccionar m tal que

$$\begin{aligned} m &\equiv a \pmod{p} \\ m &\equiv 0 \pmod{p-1} \end{aligned}$$

de esta forma $p | P(m) | a_1^m + a_2^m + \cdots + a_{2019}^m$ y $p | a_1^m - 1 + a_2^m - 1 + \cdots + a_{2019}^m - 1$, restando ambas obtenemos que $p | 2019$ lo cual es una contradicción. □

4 Consejos

- Raíces
- Coeficientes
- Grados
- manipulaciones algebraicas, x por $\frac{1}{x}$ en el caso de polinomios simétricos, sustituciones trigonométricas, etc.

5 Para ir más allá

- Interpolación
- Fórmulas de Newton
- Polinomios Simétricos
- Polinomios Ciclotómicos
- Números complejos
- Cálculo

6 Lista de Problemas

Problem 1. *Encuentra todos los polinomios* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ *con* $a_j \in \{-1, 1\} (j = 0, 1, 2, \ldots n)$*, tal que todas sus raíces son reales.*

Problem 2. *Prueba que todos los ceros del polinomio* $p(x) = x(x-2)(x-4)(x-6) + (x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$ *son reales.*

Problem 3. *El polinomio* $P \in \mathbb{Z}[x]$ *toma valores* ± 1 *en tres números enteros distintos. Prueba que* P *no tienen raíces enteras.*

Problem 4. *Encuentra todos los polinomios con coeficientes racionales* $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ *tales que* a, b, c *son raíces las de* p.

Problem 5. *Sea el polinomio* $P \in \mathbb{Z}[x]$. *Prueba que si* $P(P(\ldots P(x \ldots)) = x$ *para algun entero* x *entonces* $P(P(x)) = x$

Problem 6. *Si* P *y* Q *son polinomios mónicos tales que* $P(P(x)) = Q(Q(x))$ *prueba que* $P \equiv Q$.

Problem 7. *Encuentra todos los polinomios* P *que satisfacen* $P(x^2 + 1) = P(x)^2 + 1$.

Problem 8. *[IMO SL 2002] Sea* P *polinomio cúbico dado por* $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$*, donde* a, b, c, d *son enteros y* $a \neq 0$. *Supongamos que* $xP(x) = yP(y)$ *para infinitos pares* x, y *de enteros con* $x \neq y$. *Prueba que* $P(x) = 0$ *tiene una raiz entera.*

Problem 9. *[IMO 2004] Encuentra todos los polinomios* f *con coeficientes reales tales que para toda terna real* a, b, c *tal que* $ab + bc + ca = 0$ *su cumple la siguiente relación*

$$f(a-b) + f(b-c) + f(c-a) = 2f(a+b+c).$$

Problem 10. *[IMO SL 2005] Encuentra todos los pares de enteros* a, b *para los cuales existe un polinomio* $P(x) \in \mathbb{Z}[X]$ *tal que el producto* $(x^2 + ax + b) \cdot P(x)$ *es un polinomio de la forma*

$$x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

donde cada $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ *es igual a* 1 *ó* -1.

Problem 11. *Prueba que el polinomio*

$$(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n) - 1$$

donde los a_i*s son enteros distintos, es irreducible en* $\mathbb{Z}[x]$.

Problem 12. *Sea*

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

un polinomio no nulo con coeficientes enteros tal que

$$P(r) = P(s) = 0$$

para ciertos r, s *con* $0 < r < s$. *Prueba que* $a_k \leq -s$ *para algún* k.

Problem 13. *Encuentra todos los números complejos z tales que*

$$(3z+1)(4z+1)(6z+1)(12z+1) = 2.$$

Problem 14. *Encuentra todos los polinomios $f(z)$ tales que*

$$f(z^2) + f(z)f(z+1) = 0$$

Problem 15. *Alice y Bob juegan un juego con un polinomio de grado al menos 4:*

$$x^{2n} + \_x^{2n-1} + \_x^{2n-2} + \cdots + \_x + 1$$

Por turnos van poniendo coeficientes. Si el polinomio resultante no tiene raiz real gana Alice, en caso contrario, gana Bob. Dado que comienza Alice, quién tiene estrategia ganadora?

Problem 16. *[IMO SL 1997] Encuentra todos los enteros positivos k para los cuales la siguiente afirmación es verdadera: Si $F(x)$ es un polinomio de coeficientes enteros que satisface $0 \leq F(c) \leq k$ para todo $c \in \{0, 1, \ldots, k+1\}$, entonces $F(0) = F(1) = \ldots = F(k+1)$.*

Problem 17. *Sea $P(x)$ un polinomio de grado $n \geq 5$ con coeficientes enteros y n raíces enteras distintas. Encuentra todas las raíces enteras de $P(P(x))$ dado que 0 es raiz de $P(x)$.*

Problem 18. *[Ibero 2014] Encuentra todos los polinomios $P(x)$ wcon coeficientes reales tales que $P(2014) = 1$ y existe un entero c tal que: $xP(x-c) = (x-2014)P(x)$.*

Problem 19. *[Ibero 2019] Encuentra todos los polinomios $P(x)$ de grado $n \geq 1$ y coeficientes enteros tal que para todo número real x la siguiente condición se satisface:*

$$P(x) = (x - P(0))(x - P(1))(x - P(2)) \cdots (x - P(n-1))$$

Problem 20. *[IMO 2006] Sea $P(x)$ un polinomio de grado $n > 1$ con coeficientes enteros y sea k un entero positivo. Considera $Q(x) = P(P(\ldots P(P(x)) \ldots))$, donde P ocurre k veces. Prueba que existen a lo sumo n enteros t tales que $Q(t) = t$.*

Problem 21. *[IMO SL 1997] Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes reales tal que $P(x) > 0$ para todo $x \geq 0$. Prueba que existe un entero positivo n tal que $(1+x)^n \cdot P(x)$ es un polinomio con coeficientes no negativos.*

Problem 22. *[IMO SL 1997] Sea p un número primo y f un polinomio con coeficientes enteros de grado d tal que $f(0) = 0, f(1) = 1$ y $f(n)$ es congruente con 0 ó 1 módulo p para todo entero n. Prueba que $d \geq p - 1$.*

Problem 23. *[IMO SL 1996] Sea $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Prueba que si $|P(x)| \leq 1$ para toda x tal que $|x| \leq 1$, entonces*

$$|a| + |b| + |c| + |d| \leq 7.$$

Problem 24. *[Rumanía 1998] Prueba que para todo entero positivo n, el polinomio*

$$f(x) = (x^2 + x)^{2^n} + 1$$

es irreducible en $\mathbb{Z}[]$.

Problem 25. *[Rusia 2000] Prueba que existen 10 números reales distintos $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ tal que la ecuación*

$$(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_1 0) = (x + a_1)(x + a_2) \cdots (x + a_n).$$

Problem 26. *[Tailandia 2021] Sea $d \geq 13$ un entero, y sea $P(x) = a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ un polinomio de grado d con coeficientes complejos ta que $a_n = a_{d-n}$ para todo $n \in \{0, 1, \ldots, d\}$. Prueba que si P no tiene raíces dobles, entonces P tiene dos raíces distintas z_1 y z_2 tal que $|z_1 - z_2| < 1$.*

References

[1] 101 Problems in Algebra From the training of the USA IMO Team.

[2] https://artofproblemsolving.com/community

[3] The IMO compendium, Dusan Djukic et all.

[4] Polynomials, Alexander Remorov.

[5] Polynomials in the AIME

[6] Integer Polynomials, Yufei Zhao.