Olimpiada Matemática Española 2022
Problemas y Soluciones.

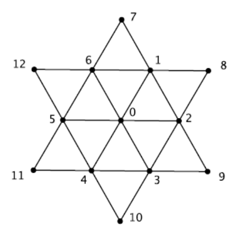
Héctor Raúl Fernández Morales
10001noesprimo@gmail.com

Abril, 2022

Día 1.

Problem 1

La estrella de seis puntas de la figura es regular: todos los ángulos interiores de los triángulos pequeños son iguales. A cada uno de los trece puntos señalados se le asigna un color: verde o rojo. Demuestra que siempre habrá tres puntos del mismo color que son vértices de un triángulo equilatero.



Problem 2

Sean a, b, c, d cuatro números reales positivos. Si se cumple

$$a + b + \frac{1}{ab} = c + d + \frac{1}{cd} \qquad y \qquad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + ab = \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + cd$$

demuestra que al menos dos de los valores a, b, c, d son iguales.

Problem 3

Sea ABC un triángulo, con $AB < AC$, y sea Γ su circuncírculo. Sean D, E y F los puntos de tangencia del incírculo con BC, CA y AB, respectivamente. Sea R el punto de EF tal que DR es una altura del triángulo DEF y sea S el punto de corte de la bisectriz exterior del ángulo $\angle BAC$ con Γ. Probar que AR y SD se cortan sobre Γ.

Día 2.

Problem 4

Sea P un punto en el plano. Demuestra que es posible trazar tres semirrectas con origen en P con la siguiente propiedad: para toda circunferencia de radio r que contiene a P en su interior, si P_1, P_2 y P_3 son los puntos de corte de las semirrectas con la circunferencia, entonces

$$|PP_1| + |PP_2| + |PP_3| \leq 3r$$

Problem 5

En un grupo de 2022 estudiantes, algunos son amigos entre sí, y la amistad es siempre recíproca. Sabemos que cualquier subconjunto de esos estudiantes tiene la siguiente propiedad: siempre existe un estudiante del subconjunto que es amigo de, a lo sumo, 100 estudiantes del mismo.

a) Determina el menor entero positivo N que nos asegura que se cumple la siguiente propiedad: es posible dividir a los estudiantes en N grupos (no necesariamente del mismo tamaño), de manera que dos estudiantes que están en el mismo grupo nunca son amigos entre sí.

b) Numeramos a los estudiantes del 1 al 2022. Sea c_i el número de amigos del estudiante i. Determina el máximo valor que puede tomar la suma

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_{2022}.$$

Problem 6

Halla todas las ternas de enteros positivos (x, y, z) , con $z > 1$, que satisfacen simultáneamente que

(i) $x|y+1$

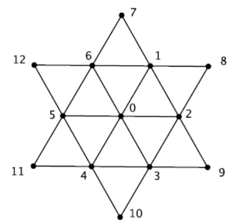
(ii) $y|z-1$

(iii) $z|x^2+1$

Soluciones

Solución 1

Sin pérdida de generalidad supongamos que el punto 0 es Rojo.



Claim 1

Si en el hexágono $(1,2,3,4,5,6)$ no hay 4 verdes, entonces hay un triángulo equilátero cromático.

Demostración

Veamos que si en $(1,2,3,4,5,6)$ hay dos rojos seguidos entonces hay un triángulo cromático, por tanto necesitamos al menos 3 verdes.
Si hay 3 verdes y 3 rojos estos están alternados y se forman dos triángulos equiláteros cromáticos.
Si hay 5 o 6 verdes trivialmente hay triángulos equiláteros cromáticos.

Claim 2

Si en el hexágono $(1,2,3,4,5,6)$ hay 4 verdes y 2 rojos y estos últimos no están opuestos , entonces hay un triángulo cromático. $\square$

Demostración

En efecto, si los rojos están seguidos tenemos un triángulo equilátero crómatico. Si están separados por una verde, por ejemplo $(1,3)$ rojos entonces $(2,4,6)$ es equilátero y cromático verde. $\square$

Claim 3

Si en el hexágono $(1,2,3,4,5,6)$ hay 4 verdes y 2 rojos y estos últimos están opuestos , entonces hay un triángulo cromático.

Demostración
Sean $(1, 4)$ los rojos, entonces $(2, 3)$ son verdes y por tanto (9) sea verde o rojo completa un triángulo cromático. $\square$

La combinación de los claims concluye el problema.

Solución 2
Consideremos los polinomios

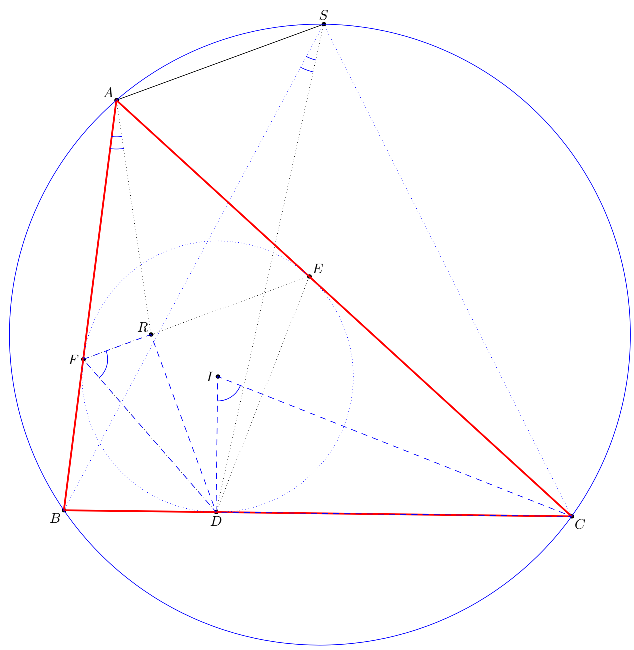
$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-\frac{1}{ab}) = x^3 - (a+b+\frac{1}{ab})x^2 + (\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+ab)x - 1$$

y

$$g(x) = (x-c)(x-d)(x-\frac{1}{cd}) = x^3 - (c+d+\frac{1}{cd})x^2 + (\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+cd)x - 1$$

Veamos que las condiciones implican que ambos polinomios son iguales de donde sus raíces son las mismas lo que implica que $\{a, b, \frac{1}{ab}\} = \{c, d, \frac{1}{cd}\}$ y esto a su vez implica que al menos dos de los valores a, b, c, d son iguales.

Solución 3
En la figura,



primeramente veamos que si AS es bisectriz exterior del $\angle BAC$ entonces esta es perpendicular a la bisectriz interior de donde S es el punto medio del arco BAC en Γ.

Claim 4

$$\frac{FR}{RE} = \frac{BD}{DC}$$

Demostración
Veamos que

$$\begin{aligned}\angle DFR &= 180 - \angle DBF - \angle EFA \\ &= 180 - (90 - \frac{\angle CBA}{2}) - (90 - \frac{\angle BAC}{2}) \\ &= \frac{\angle CBA}{2} + \frac{\angle BAC}{2} \\ &= 90 - \frac{\angle ACB}{2} \\ &= \angle DIC\end{aligned}$$

de donde $\triangle DFR \sim \triangle CID$ lo que implica que

$$\frac{FR}{ID} = \frac{DR}{DC}$$

de manera análoga

$$\frac{ER}{ID} = \frac{DR}{DB}$$

combinando ambas obtenemos que $\frac{FR}{RE} = \frac{BD}{DC}$. $\square$

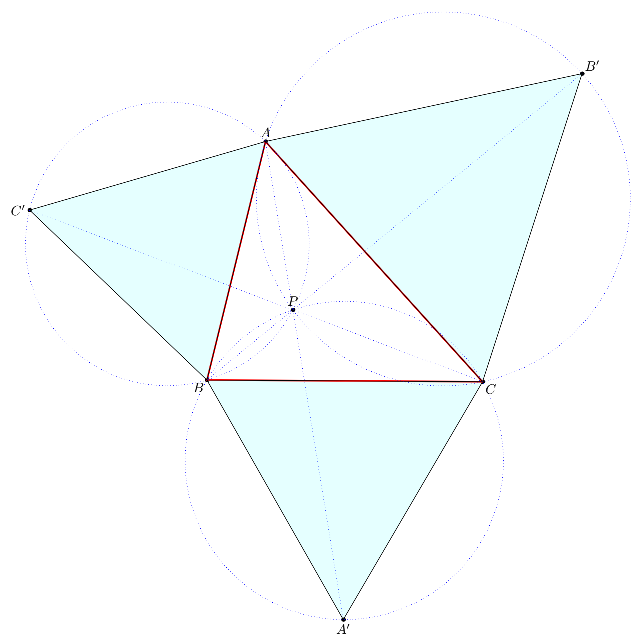
Veamos ahora que $\triangle BSC \sim \triangle FAE$, usando el claim obtenemos que

$$\angle FAR = \angle BSD$$

de donde AR y SD se cortan en Γ.

Solución 4

Dado el $\triangle ABC$ construimos exteriormente triángulos equiláteros sobre sus lados como muestra la figura.

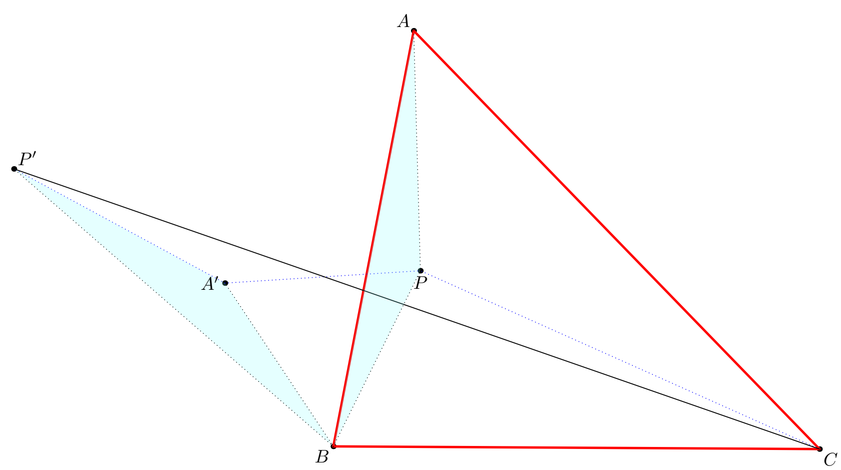


Es fácil probar que las circunferencias circunscritas a los triángulos $\triangle BCA', \triangle CAB', \triangle ABC'$ se cortan en P que además es el punto de intersección de AA', BB', CC'.
Si todos los ángulos del $\triangle ABC$ son menores que $120°$ entonces P está en el interior del triángulo y las rectas AA', BB', CC' forman tres ángulos de $120°$. El punto P se denomina **punto de Fermat** o **punto de Torricelli** del $\triangle ABC$.

Lemma 1

El punto de Fermat minimiza la suma de las distancias a los vértices.

Demostración
En efecto consideremos cualquier punto P y rotemos el triángulo $\triangle BPA$, alrededor de B, $60°$ como muestra la figura



Veamos que la longitud de CP' es fija y que

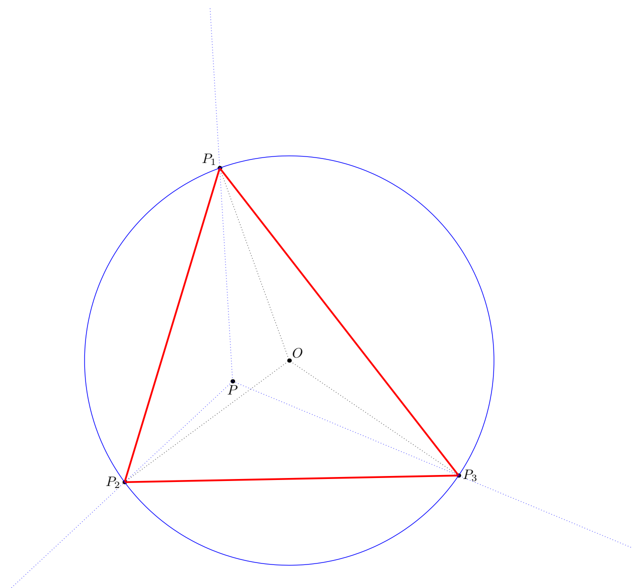
$$|AP| + |BP| + |CP| = |P'A'| + |A'P| + |PC| \geq |CP'|$$

de donde la suma $|AP| + |BP| + |CP|$ será mínima cuando la quebrada coincida con el segmento CP' o lo que es lo mismo que

$$\angle BPC = \angle BA'P' = \angle BPC = 120°$$

lo que implica que P es el punto de Fermat. $\square$

Ahora, para resolver el problema consideremos tres semirrectas partiendo de P que formen tres ángulos de $120°$, como muestra la figura.



Cualquier circunferencia que contenga a P en el interior cortará a dichas semirrectas en puntos P_1, P_2, P_3 tales que P es el punto de Fermat del $\triangle P_1P_2P_3$, por el lema anterior

$$|PP_1| + |PP_2| + |PP_3| \leq |OP_1| + |OP_2| + |OP_3| = 3r.$$

Solución 5

(a) Veamos que podemos ordenar los estudiantes de la siguiente manera

$$\{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_{2022}\}$$

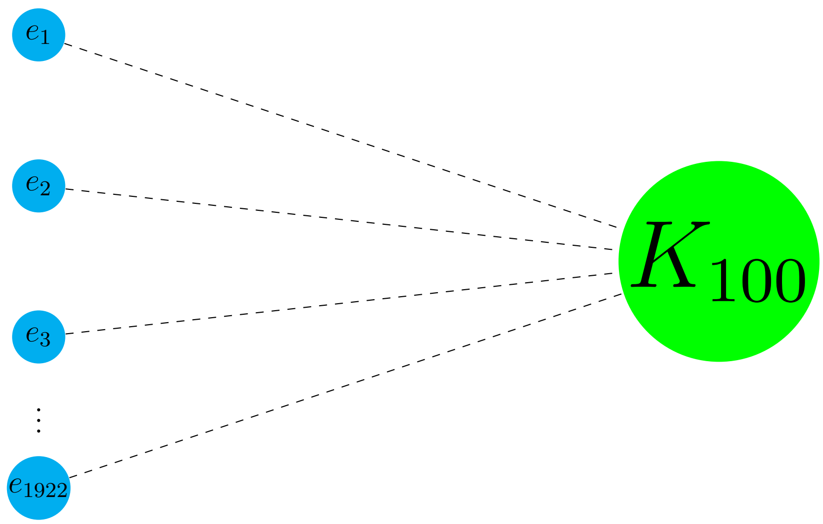
donde para todo k el estudiante e_k tiene a lo sumo 100 amigos en el conjunto $\{e_{k+1}, e_{k+2}, \ldots, e_{2022}\}$.

Consideremos inicialmente los grupos

$$G_1 = \{e_{2022}\}, G_2 = \{e_{2021}\}, \ldots, G_{101} = \{e_{1922}\}.$$

Ahora vamos colocando los estudiantes en orden inverso, e_{1921} tiene al inicio a lo sumo 100 amigos colocados luego tiene al menos un grupo G donde ponerse. Este proceso se puede repetir hasta colocar a e_1.

Para probar que $N = 101$ es el menor entero posible consideremos el siguiente grafo,



por una parte tenemos el grafo completo de 100 vértices y luego tenemos 1922 vértices que no están conectados entre ellos pero sí con todos los de K_{100}, esto es lo que las aristas discontinuas representan.

Es fácil comprobar que esta configuración satisface la condición del problema. Además, para separarlos en menos de 100 grupos necesitamos un grupo para cada estudiante de K_{100} y luego no podemos colocar a ninguno de los demás estudiantes.

(b) El análisis es similar. Con el enfoque de grafos, inicialmente escogemos un vértice con grado menor o igual que 100 y lo eliminamos, esto lo podemos hacer mientras queden más de 100 vértices. Cuando quedan i vértices con $i \leq 100$ sacaríamos como mucho $i-1$, de esta forma, la cantidad máxima de aristas que podemos eliminar es

$$100 \cdot 1922 + \binom{100}{2}$$

Como la suma de las aristas es el doble de la suma de los grados el valor máximo que puede tener

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_{2022}$$

es $2(100 \cdot 1922 + \binom{100}{2}) = 394300$. Este valor además se alcanza para el grafo del apartado (a).

Solución 6 (Martín Padrón)

Las únicas soluciones para (x, y, z) son $\boxed{(1,1,2),(2,1,5),(2n+1,2n,2n^2+2n+1).}$

Sea $y+1 = ax$, $z-1 = by$ and $x^2+1 = cz$, con $a, b, c \geq 1$. Esto implica que

$$x^2 + 1 = c(b(ax-1)+1)$$

Haciendo $c = t+1$ obtenemos

$$x^2 = tb(ax-1) + t + b(ax-1)$$

de donde $x|tb+b-t \Rightarrow tb \geq x+t-b$.

Ahora,

$$x^2 = tb(ax-1)+t+b(ax-1) \geq (x+t-b)(ax-1)+t+b(ax-1) = ax^2-x+tax$$

$$x \geq ax - 1 + ta \implies x(1-a) \geq ta - 1$$

Si $a \geq 3$ la desigualdad anterior no se satisface.

Caso 1: Si $a = 2$ entonces $t = 0$ y $x = 1$.

$$x = 1 \implies z = 2 \implies y = 1$$

Caso 2: Si $a = 1, t = 0$

$a = 1 \implies y = x-1$, $t = 0 \implies z = x^2+1$, de donde $b(x-1) = x^2$ lo que implica que $x = 2$. Esto a su vez implica que $z = 5$ e $y = 1$.

Caso 3: Si $a = 1, t = 1$

$a = 1 \implies y = x-1$, $t = 1 \implies 2z = x^2+1$, de donde x es impar y $2b = x+1$ lo que implica que hay solución para todo x impar y esta es $x = 2k+1$, $y = 2k$, $z = 2k^2+2k+1$.

References

[1] https://artofproblemsolving.com