Inversión del plano.

Héctor Raúl Fernández Morales
hectorraulfm@gmail.com

Enero 14, 2021

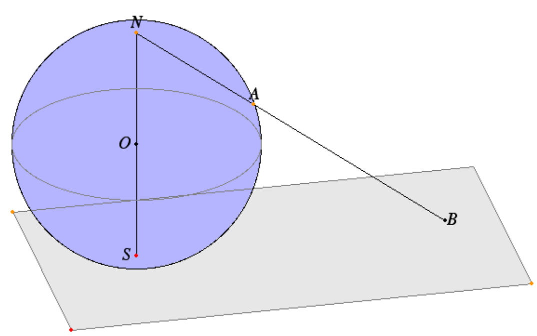
En este documento está dedicado introducir la definión de **inversión**, las principales propiedades y algunos problemas clásicos que pueden ser resueltos usando esta técnica.

1 Introducción

Desde nuestros primeros encuentros con la geometría plana nos familiarizamos con transformaciones del plano, reflexión, traslación, homotecia, etc. Estas son correspondencias uno a uno de los puntos del plano, cada una con sus propiedades y consecuencias.

En los problemas de olimpiada la inversión del plano está probada como una de las transformaciones más potentes para resolver problemas complejos. Para entender como funciona tenemos que introducir el *plano extendido*, que no es más que el plano más un punto, P_∞, que intuitivamente ubicamos en el infinito.

Consideremos una esfera tangente al plano en un punto S a la cual le "quitamos" su antípoda N, esta es conocida como *esfera puntuada*.



La *proyección estereográfica*, es aquella que envía el punto a A de la esfera puntuada al punto B el plano tal que N, A, B son colineales.

Ahora, si fijamos una recta del plano los puntos relativos a ella en la esfera puntuada forman un circulo puntuado y a medida que nos alejamos por cualquier extremo de la recta nos estaremos acercando a N en la esfera puntuada, de esta forma, intuitivamente, podemos identificar N con el punto P_∞ que le hemos añadido al plano y así todas las rectas "contienen" el punto en infinito.

2 Definición

Consideremos un punto del plano O y un número real positivo r. La **inversión** ϕ centrada en O y de radio r es la función del plano extendido en él mismo definida como

$$\phi(X) = \begin{cases} X', \text{ tal que } X' \in \overrightarrow{OX} \text{ y } OX \cdot OX' = r^2 & \text{si} \quad X \notin \{O, P_\infty\} \\ P_\infty & \text{si} \quad X = O \\ O & \text{si} \quad X = P_\infty \end{cases}$$

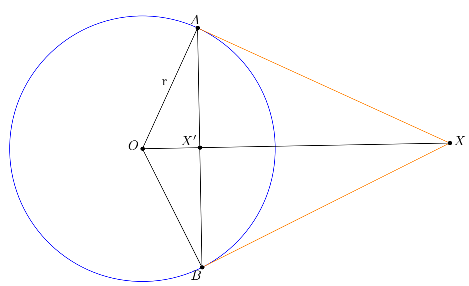
la circunferencia centrada en O de radio r es llamada *circunferencia de inversión*. Otra consecuencia inmediata es que el interior y el exterior de dicha circunferencia se intercambian tras la inversión.

3 Propiedades

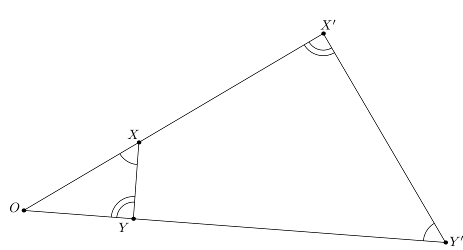
i. $\phi(\phi(X)) = X$ para todo punto del plano. La demostración es trivial y como consecuencia tenemos que ϕ es efectivamente una biyección del plano extendido.

ii. Si $X \in C(O, r)$ entonces $\phi(X) = X$, esto es, la circunferencia de inversión queda fija.

iii. Si $OX > r$, entonces $\phi(X)$ es el punto medio del segmento que une los puntos de tangencia de X a $C(O, r)$.



iv. Si $\phi(X) = X'$ and $\phi(Y) = Y'$, entonces $XX'Y'Y$ es ciclico. Las rectas XY y $X'Y'$ son antiparalelas respecto al $\angle XOY$.



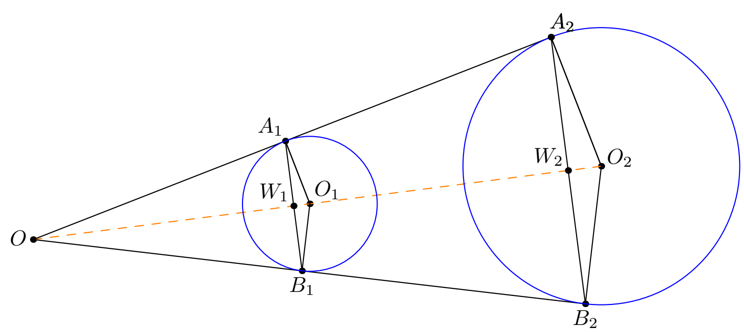
La relación $OX \cdot OX' = OY \cdot OY' = r^2$ garantiza que $\frac{OX}{OY} = \frac{OY'}{OX'}$, de donde $\triangle OXY \sim \triangle OY'X'$ lo que implica que $\angle OXY = \angle OY'X'$.

Además de esta semejanza tenemos

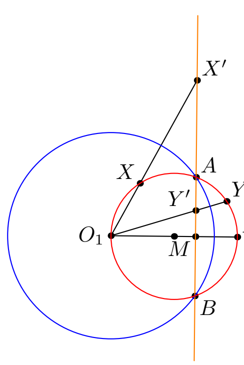
$$\frac{X'Y'}{XY} = \frac{OY'}{OX} = \frac{OY' \cdot OY}{OX \cdot OY} = \frac{r^2}{OX \cdot OY}$$

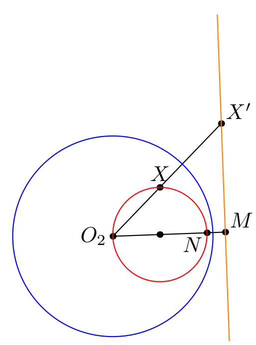
de donde $X'Y' = \frac{r^2}{OX \cdot OY} XY$.

v. Una circunferencia que no pasa por O se convierte en una circunferencia que no pasa por O. Es consecuencia de la propiedad anterior. Los centros de la circunferencia origen y la circunferencia imagen son colineales con O, sin embargo, el centro de la imagen no es la imagen del centro!!! La imagen siguiente describe una circunferencia y su imagen.



vi. Una circunferencia que pasa por O se convierte en una recta que no pasa por O y viceversa. Dicha recta es paralela a la tangente en O de la circunferencia origen.





vii. Una recta que pasa por O se convierte en ella misma.

viii. Se conservan los ángulos entre rectas y circunferencias. En particular si dicho águlo es 90 las curvas se dicen ortogonales. Las circunferencias ortogonales a la circunferencia de inversión se quedan fijas.

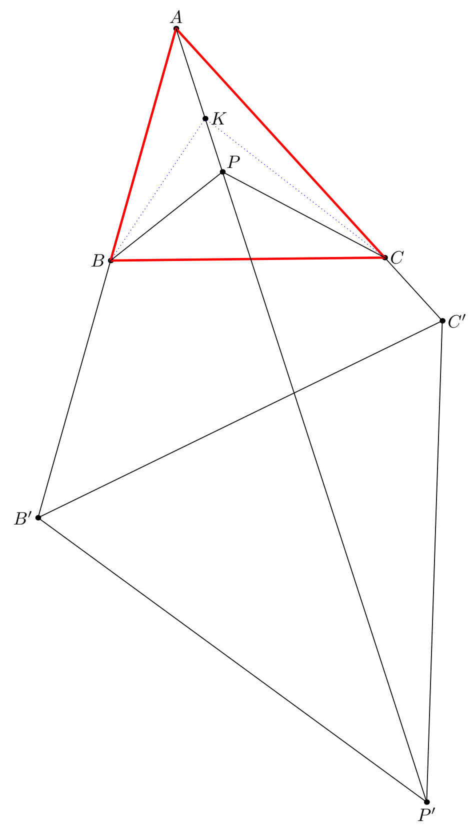
4 Problemas Resueltos

Problem 1. *(IMO 1996/P2) Sea P un punto interior al $\triangle ABC$ tal que*

$$\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC.$$

Sean D, E los incentros de $\triangle APB$, $\triangle APC$, respectivamente. Prueba que las rectas AP, BD, CE concurren.

Sol: Apliquemos una inversión centrada en A y con radio mayor que AB y AC.



Ahora, la condición $\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC$ implica que

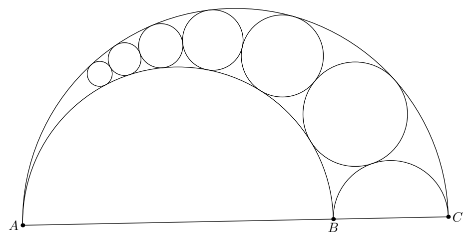
$$\angle AB'P' - \angle C'B'A = \angle AC'P' - \angle B'C'A,$$

de donde $\angle P'B'C' = \angle P'C'B' \Rightarrow P'B' = P'C'$. Usando la propiedad iv,

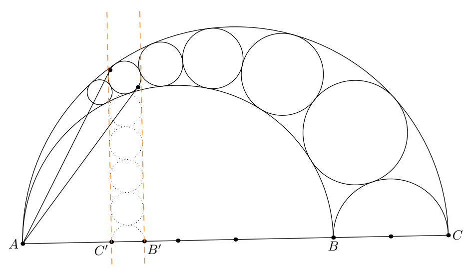
$$P'B' = \frac{r^2}{AB \cdot AP} BP \Rightarrow \frac{BP}{AB} = \frac{P'B' \cdot AP}{r^2}$$

Análogamente $\frac{CP}{AC} = \frac{P'C' \cdot AP}{r^2}$. De donde $\frac{CP}{AC} = \frac{BP}{AB} = k$, por el teorema de la bisctriz, las bisectrices de $\angle ABP$ y $\angle ACP$ se cortan en el punto $K \in AP$ tal que $\frac{PK}{KA} = k$. $\square$.

Problem 2. *(Shoemaker's knife) Sean A, B, C tres puntos colineales en ese orden. Se construyen tres semicircunferencias $\Omega_{AB}, \Omega_{AC}, \Omega_{BC} = \omega_0$ con diámetros AB, AC, BC respectivamente, en el mismo lado de AC. Para cada entero positivo k sea ω_k la circunferencia tangente a Ω_{AB}, Ω_{AC} y ω_{k-1}. Demuestra que para todo entero positivo n la distancia del centro de ω_n a AC es n veces el diámetro de ω_n.*



Sol: La espectacular solución de este problema propuesto por Pappus en tiempos de Diocleciano(284-305 d.C.) comienza por darnos cuenta que al invertir con centro en A, Ω_{AB} y Ω_{AC} se convierten endos rectas paralelas. Aprovechando esto fijemos como radio de inversión aquel que deja fija la circunferencia ω_n.



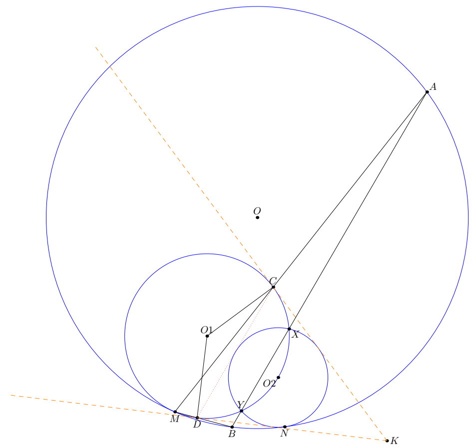
Veamos que todas las circunferencias imágenes de las circunferencias ω_k son tangentes a las imágenes de Ω_{AB} y Ω_{AC}, de donde estas no son más que circunferencias congruentes tangentes a las mencionadas paralelas. La conclusión es ahora evidente. $\square$

Problem 3. *(IMO 1999/P5) Dos círculos Ω_1 y Ω_2 son tangentes internamente a Ω en M y N y el centro de Ω_2 está en Ω_1. la recta determinada por la cuerda común de Ω_1 y Ω_2 intersecta Ω en A y B. MA y MB intersectan Ω_1 en C y D. Prueba que Ω_2 es tangente a CD.*

Sol: Supongamos que el radio de Ω_2 es menor que el radio de Ω_1. Sean X, Y los puntos comunes a Ω_1 y Ω_2. Si invertimos con centro en A y radio

$\sqrt{AX \cdot AY}$, Ω_1 y Ω_2 quedan fijas por tanto M y C se intercambian. Por otra parte Ω se convierte en una recta que es paralela a ambas, además dicha recta pasa por la imagen de M que es C.

Análogamente si invertimos en B con radio $\sqrt{BY \cdot BX}$ obtenemos que la tangente común a Ω_1 y Ω_2 pasa por D. Sea K la intersección de dichas tangentes comunes.



Ahora, KDO_1C es cíclico y O_1 es el punto medio del arco DO_1C en (KDC), además $O_1C = O_1D = O_1O_2$, por el lema del incentro O_2 es el incentro de $\triangle CKD$ y concluimos que CD es tangente a Ω_2.

Cuando el radio de Ω_2 es mayor que el de Ω_1, de manera análoga se obtiene que O_2 es el $K-$excentro del $\triangle CKD$ y el problema está resuelto igualmente. $\square$

5 Lista de Problemas

Problem 1. *(Teorema de Ptolomeo) Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico. Probar que*

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD.$$

Problem 2. *(USAMO 1993) Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que las diagonales son perpendiculares y sea O la intersección de dichas diagonales. Prueba que las reflexiones de sobre los lados de $ABCD$ pertenecen a una misma circunferencia.*

Problem 3. *Israel 1995 Sea PQ diámetro de la semicircunferencia Ω. La circunferencia Γ es tangente internamente a Ω y tangente a PQ en C. Sea $A \in \Omega$ y $B \in PQ$ tal que $AB \perp PQ$ y AB es tangente a Γ, además C está entre P y B. Prueba que AC biseca al $\angle PAB$.*

Problem 4. *(Rusia 1995) Dado una semicircunferencia de diámetro AB y centro O y una recta que corta a dicha semicircunferencia en C y D y a AB en $M(MB < MA,\ MD < MC)$. Sea K el segundo punto de intersección de (AOC) y (DOB). Prueba que $\angle MKO = 90$.*

Problem 5. *(Iran 1995) Sean M, N y P los puntos de intersección del incírculo de $\triangle ABC$ con AB, BC y CA respectivamente. Prueba que el ortocentro de $\triangle MNP$, el incentro de $\triangle ABC$ y el circuncentro de $\triangle ABC$ son colineales.*

Problem 6. *(China 2006) Sea $ADBE$ un cuadrilátero cíclico con diámetro AB cuyas diagonales se cortan en C. Sea $\Gamma = (BOD)$, donde O es el punto medio de AB. Sea F en Γ tal que OF es diámetro y sea G la intersecciçon del rayo FC con Γ. Prueba que $AOGE$ es cíclico.*

Problem 7. *(USAMO 2009/P5) El trapecio $ABCD$ está inscrito en ω con $AB \parallel CD$. El punto G está en el interior de $tringleBCD$. Los rayos AG, BG cortan a ω de nuevo en P, Q respectivamente. La recta por G paralela a AB corta a BD, BC en R, S respectivamente. Prueba que $PQRS$ es cíclico si y solo si BG es bisectriz de $\angle CBD$.*

Problem 8. *(BAMO 2008) El punto D es interior al $\triangle ABC$. Sean A_1, B_1, C_1 las intersecciones de AD, BD, y CD con los circuncirculos de $\triangle BDC$, $\triangle CDA$, y $\triangle ADB$, respectivamente. Prueba que,*

$$\frac{AD}{AA_1} + \frac{BD}{BA_1} + \frac{CD}{CC_1} = 1.$$

Problem 9. *(IMO Shortlist 2003) Sean Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 circunferencias distintas tales que Γ_1, Γ_3 son tangentes exteriormente en P y Γ_2, Γ_4 son tangentes exteriormente en el mismo punto P. Supongamos que Γ_1 y Γ_2; Γ_2 y Γ_3; Γ_3 y Γ_4; Γ_4 y Γ_1 se cortan en A, B, C, D, respectivamente, y que todos estos punto son disintos de P. Prueba que*

$$\frac{AB \cdot BC}{AD \cdot DC} = \frac{PB^2}{PD^2}.$$

Problem 10. *(EGMO 2013/P5) Sea* Ω *el circuncirculo de* $\triangle ABC$*. La circunferencia* ω *es tangente a los lados* AC *y* BC *y es tangente internamente a* Ω *en el punto* P*. La recta paralela a* AB *que intersecta el interior de* $\triangle ABC$ *es tangente a* ω *en* Q*. Prueba que* $\angle ACP = \angle QCB$*.*

Problem 11. *(IMO 1993/P2) Sea* A*,* B*,* C*,* D *puntos del plano con* C *y* D *en el mismo lado de la recta* AB*, tales que* $AC \cdot BD = AD \cdot BC$ *y* $\angle ADB = 90 + \angle ACB$*. Encuentra la razón*

$$\frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD},$$

y prueba que (ACD) *y* (BCD) *son ortogonales.*

Problem 12. *(IMO 2015/P3) Sea* $\triangle ABC$ *acutángulo con* $AB > AC$*. Sea* Γ *su circuncirculo,* H *su ortocentro, y* F *el pie de la altura desde* A*. Sea* M *el punto medio de* BC*. Sea* Q *en* Γ *tal que* $\angle HQA = 90$ *y sea* K *en* Γ *tal que* $\angle HKQ = 90$*. Los puntos* A*,* B*,* C*,* K *y* Q *son todos distintos y están en* Γ *en ese orden. Prueba que los circucírculos de* $\triangle KQH$ *y* $\triangle FKM$ *son tangentes.*

References

[1] Mathematical Excalibur, Vol. 9 Num. 2, May 2004-July 2004.0

[2] `http://www.math.ubc.ca/~cass/courses/m308-03b/projects-03b/hunter/hunter.html#:~:text=Let%20two%20semicircles%20be%20drawn,%2C%20C2%2C....`

[3] Evan Chen, Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads, Chapter 8.

[4] `https://artofproblemsolving.com/community`