IMO 2021 Problemas y Soluciones.

Héctor Raúl Fernández Morales
10001noesprimo@gmail.com

Julio, 2021

Día 1.

Problem 1. *Sea $n \geq 100$ un entero. Iván escribe cada uno de los números $n, n+1, ..., 2n$ en un naipe diferente. Después de barajar estos $n+1$ naipes, los divide en dos pilas distintas. Probar que al menos una de esas pilas contiene dos naipes tales que la suma de sus números es un cuadrado perfecto.*

Problem 2. *Probar que la desigualdad*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i + x_j|}$$

se satisface para cualquier elección de números reales $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Problem 3. *Sea D un punto interior de un triángulo acutángulo ABC, con $AB > AC$, de forma que $\angle DAB = \angle CAD$. El punto E en el segmento AC satisface que $\angle ADE = \angle BCD$, el punto F en el segmento AB satisface $\angle FDA = \angle DBC$, y el punto X en la recta AC satisface $CX = BX$. Sean O_1 y O_2 los circuncentros de los triángulos ADC y EXD respectivamente. Probar que las rectas BC, EF y O_1O_2 son concurrentes.*

Día 2.

Problem 4. *Sean* Γ *una circunferencia con centro* I *y* $ABCD$ *un cuadrilátero convexo tal que cada uno de los segmentos* AB, BC, CD *y* DA *es tangente a* Γ. *Sea* Ω *la circunferencia circunscrita del triángulo* AIC. *La prolongación de* BA *más allá de* A *corta a* Ω *en* X, *y la prolongación de* BC *más allá de* C *corta a* Ω *en* Z. *Las prolongaciones de* AD *y* CD *más allá de* D *cortan a* Ω *en* Y *y* T *respectivamente. Probar que*

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$

Problem 5. *Dos ardillas, Ardi y Dilla, han recolectado* 2021 *nueces para el invierno. Ardi numera las nueces desde* 1 *hasta* 2021, *y excava* 2021 *pequeños hoyos en el suelo en una disposición circular alrededor de su árbol favorito. A la mañana siguiente, Ardi observa que Dilla ha colocado una nuez en cada hoyo, pero sin tener en cuenta la numeración. No contenta con esto, Ardi decide reordenar las nueces realizando una secuencia de* 2021 *movimientos. En el* k*-ésimo movimiento Ardi intercambia las posiciones de las dos nueces adyacentes a la nuez con el número* k. *Probar que existe un valor de* k *tal que, en el* k*-ésimo movimiento, las nueces intercambiadas tienen números* a *y* b *tales que* $a < k < b$.

Problem 6. *Sean* $m > 2$ *un entero,* A *un conjunto finito de enteros (no necesariamente positivos), y* $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m$ *subconjuntos de* A. *Suponemos que para cada* $k = 1, 2, \ldots, m$, *la suma de los elementos de* B_k *es* m^k. *Probar que* A *contiene al menos* $m/2$ *elementos.*

Soluciones

Solución 1. Veamos que si en el intervalo $[n, 2n]$ encontramos tres números a, b, c tales que $a+b, b+c$ y $c+a$ son cuadrados perfectos entonces el problema estaría resuelto. Es es debido a que en cualquier partición existirá un conjunto con al menos dos de estos números.
Consideremos el siguiente sistema

$$\left.\begin{array}{l} a+b=(2k-1)^2 \\ b+c=(2k)^2 \\ c+a=(2k+1)^2 \end{array}\right] \Rightarrow (a,b,c)=(2k^2-1, 2k^2-4k, 2k^2+4k).$$

Lo que necesitamos entonces es que

$$\left.\begin{array}{l} n \leq 2k^2-4k \\ 2n \geq 2k^2-4k \end{array}\right] \Leftrightarrow n \in [k^2+2k, 2k^2-4k] = I_k.$$

Veamos que $I_9 = [99, 126]$, $I_{10} = [120, 160] \ldots$
De hecho a partir de $k = 9$ los intervalos tienen intersección no vacío ya que

$$\begin{gathered} 2k^2-4k \geq (k+1)^2+2(k+1) \\ \Updownarrow \\ k^2-8k-3 \geq 0 \end{gathered}$$

y esta última desigualdad es cierta a partir de $k = 9$.
Hemos resuelto el problema para todo $n \geq 99$.

Remark. *Para $n = 98$ hay un contraejemplo.*

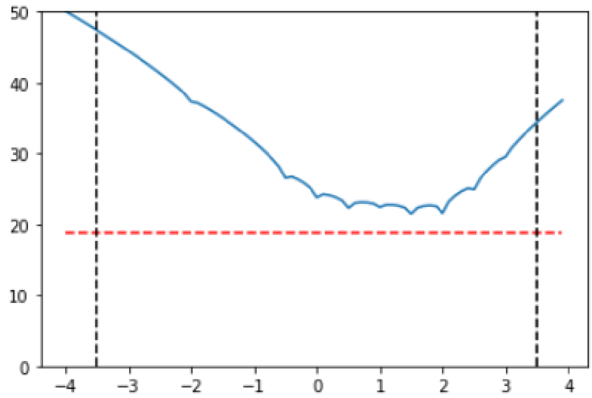
Solución 2. Dados $x_1, x_2, \ldots, x_n$, consideremos

$$L = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i - x_j|},$$

veamos que si sumamos t a cada una de la variables el L se mantiene fijo y el miembro derecho de la desigualdad de convierte en

$$h(t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i + x_j + 2t|}.$$

Analicemos la naturaleza de la función h. Es fácil ver que podemos escoger $T > 0$ de modo tal que $f(T) \geq L$ y $f(-T) \geq L$, sea el conjunto $S = \{-\frac{x_i+x_j}{2}\} \cap \{-T, T\}$. Veamos que $f(t) = \sqrt{|k+2t|}$ es cóncava en los intervalos $(-\infty, -k/2]$ y $[-k/2, -\infty)$, esto implica que h es cóncava en los intervalos delimitados por los puntos de S.



Sea $[a, b]$ el intervalo que contiene al 0, donde $a, b \in S$, la concavidad implica que $h(0) \geq \min\{h(a), h(b)\}$, por tanto es suficiente probar que $h(-\frac{x_i+x_j}{2}) \geq L$. Esto último es equivalente a probar la desigualdad original cuando las $x's$ son trasladadas de modo tal que hay dos que suman cero. En otras palabras

$$L \leq h(0)$$
$$\Uparrow$$
$$L \leq h(-\tfrac{x_i+x_j}{2}) \text{ para todo par } x_, x_j$$
$$\Updownarrow$$
$$L \leq h(-\tfrac{\hat{x}_i+\hat{x}_j}{2}) \text{ para las variables trasladadas de modo que el mínimo se obtienen en } 0$$
$$\Updownarrow$$
$$L \leq h(0) \text{ donde dos variables suman cero.}$$

Consideremos las variables trasladadas con la misma notación. Supongamos que $x_i + x_j = 0$ para $i \neq j$(el caso $i = j$ es mas sencillo aún). Si eliminamos todos los términos que involucran a estas dos variables cada miembro se reduce en

$$2\sqrt{2|x_i|} + 2\sum_{k\neq i,j}\left(\sqrt{|x_k + x_i|} + \sqrt{|x_k + x_j|}\right)$$

y tenemos la misma desigualdad pero con dos variables menos. Notando que la desigualdad para $n = 0, 1$ es trivial podemos concluir por inducción el problema.

Solución 3. Sea $T = EF \cap BC$, sean $X, Z = AD \cap EF, BC$ y sea Q tal que $\angle ABQ = \angle DBC$ y $\angle ACQ = \angle DCB$.

Claim 1

$FECB$ es cíclico y TD es tangente a (FED) y (BDC).

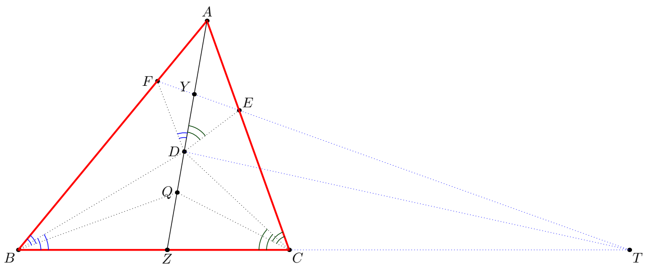
Demostración. Primeramente veamos que Q es el conjugado isogonal de D, como D está en la bisectriz del $\angle BAC$, entonces Q también pertenece a dicha bisectriz, de donde

$$\angle ABQ = \angle DBC = \angle FDA \qquad \text{y} \qquad \angle ACQ = \angle DCB = \angle EDA$$

por tanto $DEQC$ y $DFBQ$ son cíclicos. Por potencia de puntos

$$AF \cdot AB = AD \cdot AQ = « \cdot AC$$

y entonces $FECB$ es cíclico.



Veamos ahora que

$$\angle EYD = \angle AYF = \angle AEF + \angle YAE = \angle ABC + \angle BAZ = \angle AZC,$$

esto implica que $\triangle EYD \sim \triangle DZC$, de donde $\angle FED = \angle ZDC$.
Ahora,

$$\begin{aligned}
\angle EDC &= 180 - \angle EDA - \angle ZDC \\
&= 180 - \angle EDA - \angle DEF \\
&= \angle DYE \\
&= \angle ADF + \angle DFE \\
&= \angle CBD + \angle DFE
\end{aligned}$$

y esto implica que las circunferencias (FED) y (BDC) son tangentes en D. Por último veamos que dicha tangente común es uno de los tres ejes radicales que determinan (FED),(BDC) y $FECB$ por tanto pasa por T.

Sea ahora M el punto de Miquel de $BFEC$ y sea K la intersección de (ADC) con la circunferencia de centro T y radio TD.

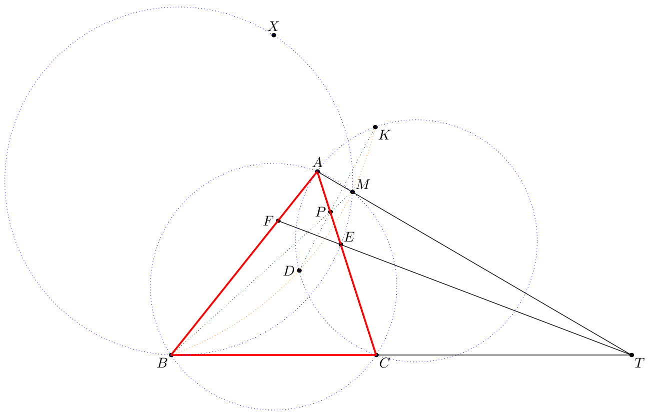
Claim 2

$KEDX$ es cíclico.

Demostración. Sea ϕ la inversión con centro en T y radio TD. Veamos que

$$\begin{aligned}
\phi(A) &= \phi(BF) \cap \phi(CE) \\
&= (CET) \cap (BFT) \\
&= M
\end{aligned}$$

Por tanto A, M, T son colineales.



Tenemos además que $\phi(KADC) = (KMDB)$. Los ejes radicales de $(KADC), (KMDB), (ABC)$ son DK, BM, AC y estos concurren en $P \in AC$. Por otra parte

$$\angle EMT = \angle ACB = \angle AMB = \angle CBX$$

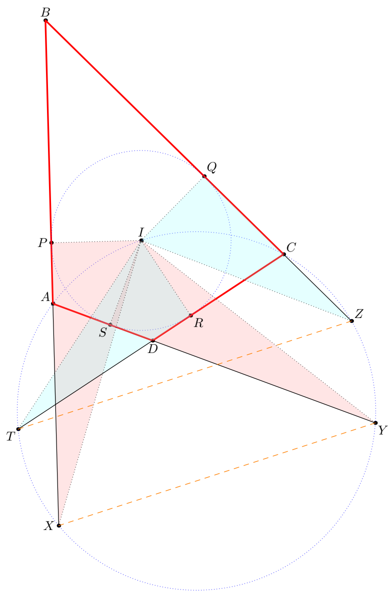
esto implica que $\angle BXC = \angle BME$ de donde $XMEB$ es cíclico.
Por potencia de puntos

$$EP \cdot EX = MP \cdot PB = DP \cdot PK$$

de donde $KEDX$ es cíclico.

El problema concluye notantdo que O_1, O_2 pertenecen a la mediatriz de DK que claramente pasa por T.

Solución 4. Sean P, Q, R, S los puntos de tangencia como se muestra en la figura,



Claim 3

- $TZ \parallel XY$, equivalentemente $TX = YZ$.
- $TR = QZ$ y $SY = XP$.

Demostración. Veamos que $\angle PXI = \angle SYI$, $\angle IPX = \angle ISY = 90$ y que $IP = IS$ de donde $\triangle IPX = \triangle ISY$ lo que implica que $SY = XP$ y además I está en la mediatriz de XY. De manera análoga $\triangle IRT = \triangle IQZ$ y de esta forma $TR = QZ$ e I está en la mediatriz de TZ lo que finaliza la demostración del claim.

Volviendo al problema y usando el claim

$$\begin{aligned}
AD + DT + TX + AX &= AS + SD + DT + TX + AX \\
&= AS + DR + DT + TX + AX \\
&= AP + TR + TX + AX \\
&= PX + TR + TX \\
&= SY + QZ + YZ \\
&= DY + DS + QC + CZ + YZ \\
&= DY + DR + RC + CZ + YZ \\
&= DY + DC + CZ + YZ
\end{aligned}$$

Solución 5. Justo antes del $k-$ésimo paso cada nuez a con $a < k$ diremos que está "usada", mietras que el resto diremos que están "activas". Procediendo al absurdo, supongamos que en cada paso k las ardillas intercambiaron a, b tales que, o bien $a, b < k$, o bien $a, b > k$. En el primer caso decimos que la nuez k es "grande" y en el segundo que la nuez k es "pequeña".
En cualquier momento del proceso las nueces usadas son divididas en varios grupos formados por una o varias nueces usadas consecutivas. Los grupos diferentes están separados por nueces activas.
Probemos por inducciónen $1 \leq k \leq 2020$ que, luego del k-ésimo movimiento, todos los grupos de nueces usadas tienen longitud impar. El caso base $k = 1$ es trivial. Para probar el paso de inducción consideremos dos casos:

- k es pequeña.
  En este caso a, b están activas y siguen activas después del movimiento, por tanto se crea un grupo nuevo de nueces usadas de longitud 1.

- k es grande.
  En este caso a, b están usadas luego pertencen a grupos de longitud impar(digamos i_a, i_b) y después del movimiento tenemos un grupo de longitud $i_a + i_b + 1$ que es impar.

Veamos ahora que luego de 2020 movimientos la nuez 2021 es la única activa, por tanto tenemos sólo un grupo de 2020 nueces usadas, lo cual es una contradicción.

Solución 6. Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Supongamos que $k < m/2$. Sea

$$s_i := \sum_{j:a_j \in B_i} a_j$$

la suma de los elmentos de B_i. Sabemos que $s_i = m_i$ para $i = 1, 2, \ldots, m$.
Consideremos las m^m expresiones de la forma

$$f(c_1, c_2, \ldots, c_m) := c_1 s_1 + c_2 s_2 + \cdots + c_m s_m, \qquad c_i \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$$

Veamos que cada número $f(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ es de la forma

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k, \qquad \alpha_i \in \{0, 1, 2 \ldots, m(m-1)\}.$$

Es fácil ver que hay como mucho $(m(m-1)+1)^k < m^{2k} < m^m$ valores distintos para las expresiones, por tanto, al menos 2 coinciden.
Como $s = m^i$, lo anterior contradice la unicidad de la representación de enteros positivos en base m. Así, lo que habíamos supuesto verdadero es falso y entonces $k \geq m/2$

References

[1] https://artofproblemsolving.com