IMO 2020 Problemas y Soluciones.

Héctor Raúl Fernández Morales
10001noesprimo@gmail.com

Diciembre 10, 2020

Día 1.

Problem 1. *Considere el cuadrilátero convexo $ABCD$. El punto P está en el interior de $ABCD$. Asuma las siguientes igualdades de razones:*

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA \ = \ 1 : 2 : 3 \ = \ \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Demuestre que las siguientes tres rectas concurren en un punto: la bisectriz interna del ángulo $\angle ADP$, la bisectriz interna del ángulo $\angle PCB$ y la mediatriz del segmento AB.

Problem 2. *Los números reales a, b, c, d son tales que $a \geq b \geq c \geq d > 0$ y $a + b + c + d = 1$. Demuestre que:*

$$(a + 2b + 3c + 4d)a^a b^b c^c d^d < 1.$$

Problem 3. *Hay $4n$ piedritas de pesos $1, 2, 3, ..., 4n$. Cada piedrita se colorea de uno de n colores de manera que hay cuatro piedritas de cada color. Demuestre que podemos colocar las piedritas en dos montones de tal forma que las siguientes dos condiciones se satisfacen:*

- *Los pesos totales de ambos montones son iguales.*
- *Cada montón contiene dos piedritas de cada color.*

Día 2.

Problem 4. *Sea $n > 1$ un entero. A lo largo de la pendiente de una montaña hay n^2 estaciones, todas a diferentes altitudes. Dos compañías de teleférico, A y B, operan k teleféricos cada una. Cada teleférico realiza el servicio desde una estación a otra de mayor altitud (sin paradas intermedias). Los teleféricos de la compañía A parten de k estaciones diferentes y acaban en k estaciones diferentes; igualmente, si un teleférico parte de una estación más alta que la de otro, también acaba en una estación más alta que la del otro. La compañía B satisface las mismas condiciones. Decimos que dos estaciones están unidas por una compañía si uno puede comenzar por la más baja y llegar a la más alta con uno o más teleféricos de esa compañía (no se permite otro tipo de movimientos entre estaciones).*
Determine el menor entero positivo k para el cual se puede garantizar que hay dos estaciones unidas por ambas compañías.

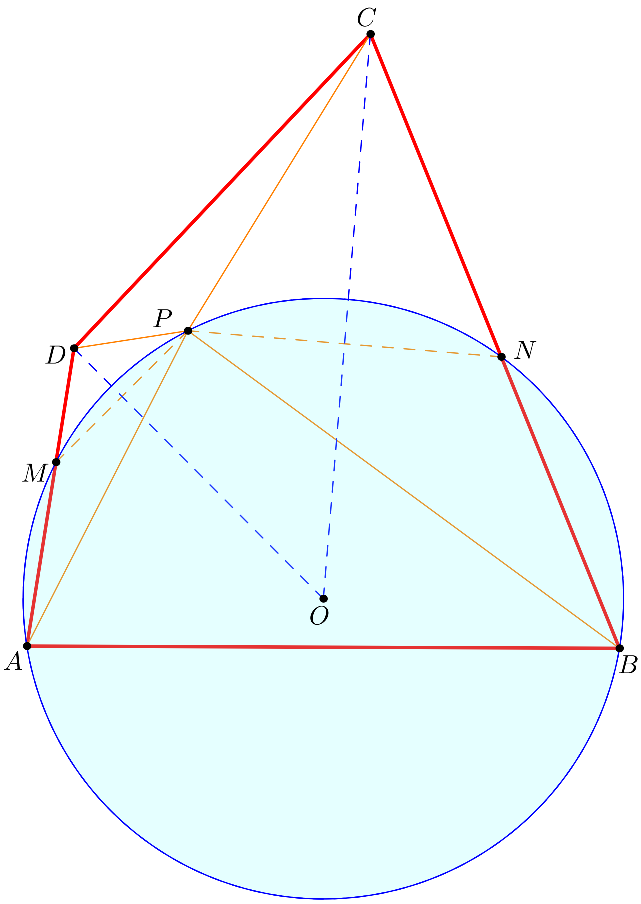
Problem 5. *Se tiene una baraja de $n > 1$ cartas, con un entero positivo escrito en cada carta. La baraja tiene la propiedad de que la media aritmética de los números escritos en cada par de cartas es también la media geométrica de los números escritos en alguna colección de una o más cartas. ¿Para qué valores de n se tiene que los números escritos en las cartas son todos iguales?*

Problem 6. *Pruebe que existe una constante positiva c para la que se satisface la siguiente afirmación:*
Sea $n > 1$ un entero y sea S un conjunto de n puntos del plano tal que la distancia entre cualesquiera dos puntos diferentes de S es al menos 1. Entonces existe una recta ℓ separando S tal que la distancia de cualquier punto de S a ℓ es al menos $cn^{-1/3}$.
(Una recta ℓ separa un conjunto de puntos S si ℓ corta a alguno de los segmentos que une dos puntos de S.)
Nota. *Los resultados más débiles que se obtienen al sustituir $cn^{-1/3}$ por $cn^{-\alpha}$ se podrán valorar dependiendo del valor de la constante $\alpha > 1/3$.*

Soluciones

Solución 1

La parte más compleja del problema es obtener una figura correcta:



Notación: En la figura sea O el circuncentro de $\Omega = (ABP)$ y sean M, N las respectivas intersecciones de BC y AD con Ω.

Claim 1: En Ω, M, N son los puntos medios de los arcos $\widehat{\text{AP}}, \widehat{\text{BP}}$ que no contienen a B y A respectivamente.
Demostración: Sabemos que:

$$\angle PBA = 2\angle MAP \Rightarrow \angle PBA - \angle MAP = \angle MAP \Rightarrow \angle MPA = \angle MAP.$$

Análogamente para N. $\square$

Claim 2: $DM = DP$ y $CP = CN$.
Demostración: Sabemos que:

$$\angle DMP = \angle ABP = \angle DPA - \angle DAP = \angle DPA - \angle MPA = \angle DPM$$

Análogamente para $\angle CPN = \angle CNP$ lo que implica el resultado. $\square$

El claim 2 implica que las bisectrices de $\angle ADP$ y $\angle PCB$ coinciden con las mediatrices de PM y PN respectivamente. El claim 1 implica que dichas mediatrices concurren en O y obviamente por O también pasa la mediatriz de AB de donde se deduce el resultado.

Solución 2

Claim 1: Sean a, b, c, d reales positivos tales que $a+b+c+d=1$. Entonces:

$$a^a b^b c^c d^d \leq (a^2+b^2+c^2+d^2)$$

Demostración: La desigualdad de Jensen dice lo siguiente:

> Dada una función convexa f, números $x_1, x_2, ..., x_n$ en su dominio y pesos positivos a_i con $1 \leq i \leq n$ se cumple que:
> $$f\left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i x_i}{\sum_{i=1}^n a_i}\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^n a_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^n a_i}. \tag{1}$$
> Con la desigualdad contraria en caso de ser f cóncava.

Ahora, sea $f(x) = \log(x),\ x > 0$. Sabemos que $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ de donde f es cóncava. Usando (1) con a, b, c, d tanto como pesos como por variables obtenemos:

$$\frac{a\log a + b\log b + c\log c + d\log d}{a+b+c+d} \leq \log\left(\frac{a\cdot a + b\cdot b + c\cdot c + d\cdot d}{a+b+c+d}\right)$$
$$a\log a + b\log b + c\log c + d\log d \leq \log(a^2+b^2+c^2+d^2)$$

sabemos que e^x es creciente, por tanto

$$e^{a\log a + b\log b + c\log c + d\log d} \leq e^{\log(a^2+b^2+c^2+d^2)}$$
$$a^a b^b c^c d^d \leq a^2+b^2+c^2+d^2.$$

$\square$

Claim 2: Sean a, b, c, d reales positivos tales que $a \geq b \geq c \geq d > 0$. Entonces:

$$(a+2b+3c+4d)(a^2+b^2+c^2+d^2) < (a+b+c+d)^3.$$

Demostración: Necesitamos probar que

$$\begin{matrix} +a^3 & +b^2a & +c^2a & +d^2a \\ +2a^2b & +2b^3 & +2b^2c & +2d^2b \\ +3a^2c & +3b^2c & +3c^3 & +3d^2c \\ +4a^2d & +4b^2d & +4c^2d & +4d^3 \end{matrix} < \begin{matrix} +a^3 & +3b^2a & +3c^2a & +3d^2a \\ +3a^2b & +b^3 & +3b^2c & +3d^2b \\ +3a^2c & +3b^2c & +c^3 & +3d^2c \\ +3a^2d & +3b^2d & +3c^2d & +d^3 \\ +6abc & +6bcd & +6cda & +6dab \end{matrix}$$

simplificando

$$b^3+2c^3+a^2d+b^2d+c^2d+3d^3 < \begin{array}{cccc} 2b^2a & +2c^2a & +2d^2a & \\ +a^2b & +b^2c & +d^2b & \\ +6abc & +6bcd & +6cda & +6dab \end{array}$$

esto se cumple debido a que

$$\begin{aligned} b^3+c^2d &\leq 2b^2a \\ 2c^3 &\leq 2c^2a \\ 2d^3 &\leq 2d^2a \\ a^2d &\leq a^2b \\ b^2d &\leq b^2c \\ d^3 &\leq d^2b \end{aligned}$$

y $6(abc+bcd+cda+dab) > 0$. $\square$

Combinando ambos claims obtenemos

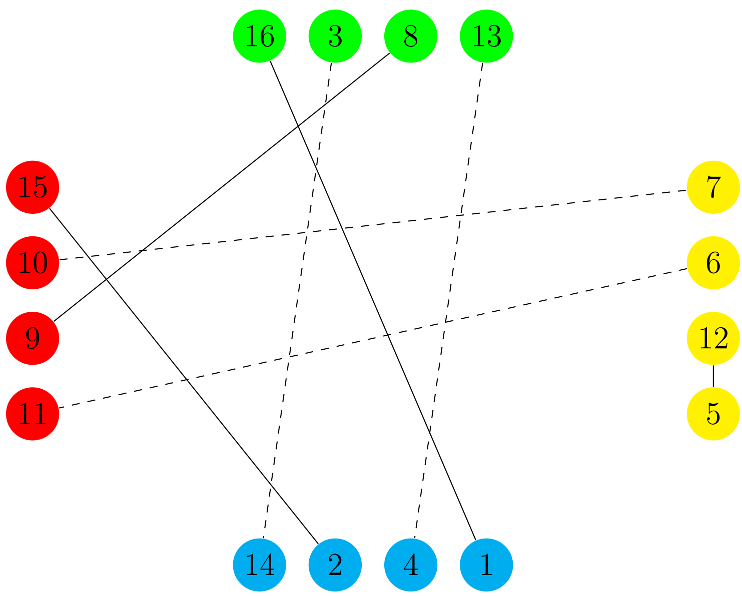
$$(a+2b+3c+4d)a^a b^b c^c d^d \leq (a+2b+3c+4d)(a^2+b^2+c^2+d^2) < (a+b+c+d)^3 = 1.$$

Solución 3

Ejemplo: Veamos un ejemplo para $n = 4$. En la figura colocamos todas las piedras del mismo color juntas en un mismo "grupo". Trazamos una arista uniendo a con b si $a+b=17$. Recorremos las aristas empezando por la piedra 1 de la siguiente forma:

$$(1,16),(3,14),(2,15),(10,7),(12,5),(6,11),(9,8),(13,4),$$

vemos que hemos recorrido cada arista una vez, además alternadamente marcamos las aristas como discontinuas.



Ahora, colocamos en un montón los extremos de aristas continuas y en el otro montón los extremos de aristas discontinuas.

Como podemos comprobar han quedado dos montones que cumplen con los requerimientos.

Lo impresionante de este problema es que podemos generalizar este proceso.

En un grafo conexo, no necesariamente simple, un ciclo euleriano es un camino cerrado que recorre cada arista exactamente una vez. Si un grafo admite un ciclo euleriano, se denomina **grafo euleriano.** *Un grafo conexo y no dirigido se dice que es euleriano si solo si cada vértice tiene un grado par.*

Volviendo al problema consideremos un grafo G con vértices $\{c_i\}_{1=1}^{n}$, uno para cada color. Si la piedra a tiene color c_i y la piedra $4n+1-a$ tiene color c_j, añadimos una arista que une c_i y c_j. De esta forma el grafo tiene $2n$ aristas. No es necesariamente conexo y puede contener lazos.

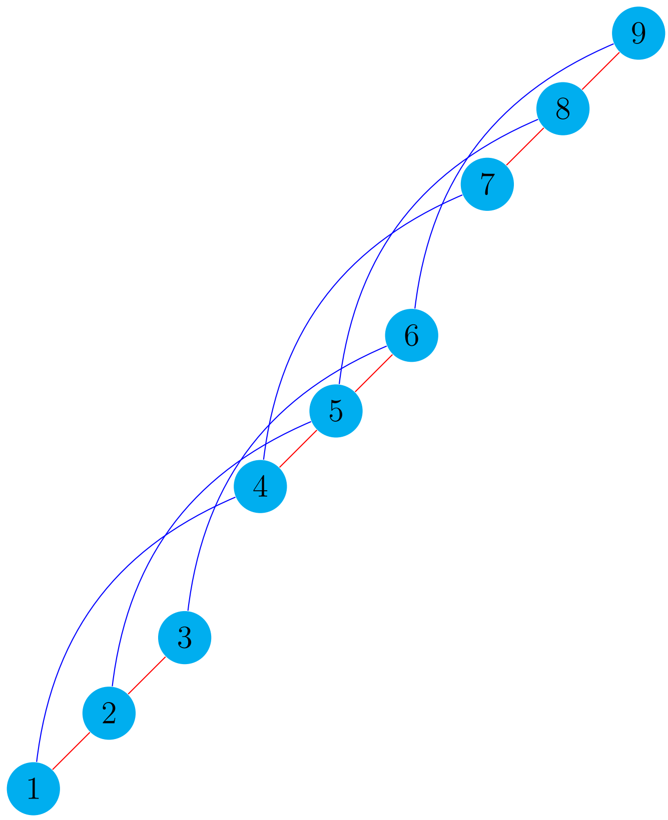
Cada vértice de G tiene grado 4, por tanto cada componente conexa de G es un grafo 4−regular. Cada componente conexa de k vértices tiene $2k$ aristas, tomemos un ciclo euleriano

$$(x_1, x_2)(x_3, x_4), \ldots (x_{4k-1}, x_{4k})$$

donde x_{2i} tiene el mismo color que x_{2i+1} incluidos x_{4k} y x_1. Ahora alternadamente colocamos $((x_{4i+1}, x_{4i+2})$ en un montón y $((x_{4i+3}, x_{4i+4})$ en el otro, $0 \leq i \leq k$.
De esta forma ambos montones suman lo mismo y tienen la misma cantidad de piedras de cada color. Uniendo los montones de cada componente conexa tenemos el resultado.

Solución 4

Ejemplo: Veamos un ejemplo para $n = 3$. En la figura colocamos 6 trayectos para cada compañía, una compañía con los trayectos en rojo y la otra en azul, vemos que no hay 2 estaciones unidas por la misma compañía.



Utilizando la idea del ejemplo anterior. Veamos que para $k = n^2 - n$ podemos ubicar los trayectos de forma tal que no hay dos estaciones conectadas por ambas compañías. Etiquetamos las estaciones por orden $1, 2, \ldots, n^2$.

La compañía A cubrirá los trayectos de i a $i+1$ para todo i que no sea divisible por n.

La compañía B cubrirá los trayectos de i a $i+n$ para todo $i \leq n^2 - n$.

Es fácil ver que cada compañía tiene $n^2 - n$ trayectos y ningun par de estaciones están conectadas por la misma compañía.

Claim : Para $n = k^2 - k + 1$ podemos garantizar que existen dos estaciones conectadas por ambas compañías.
Demostración: Dada una compañía se G el grafo donde los vértices son las estaciones y los trayectos las aristas. Veamos que G es la unión de componentes de conexas con forma de cadenas y vértices aislados.

Supongamos que G tiene s cadenas disjuntas y t vértices aislados. Sean $l_1, l_2, \ldots l_s$ las longitudes de las cadenas. Sabemos que:

$$l_1 + l_2 + \cdots + l_s = n^2 - n + 1,$$

además la cantidad de vértices en una cadena supera en 1 la longitud, de donde:

$$(l_1+1)+(l_2+1)+\cdots+(l_s+1)+t = l_1+l_2+\cdots+l_s+s+t = n^2,$$

restando ambas ecuaciones obtenemos que $s+t=n-1$, de donde G tiene exactamente $n-1$ componentes conexas.

Ahora $\frac{n^2-n+1}{n-1} = n + \frac{1}{n-1}$ de donde al menos hay una cadena de longitud $n+1$, o sea, hay alguna cadena con al menos $n+2$ vértices.

Lo que hemos visto sucede para ambas compañías. Si el grafo de la compañia A tiene $n-1$ componentes conexas y tomamos una cadena de la compañía B con $n+2$ vértices, por principio del palomar podemos garantizar que al menos 2 estaciones de esta caen en la misma componente conexa de A, por tanto hay necesariamente 2 estaciones conectadas por ambas compañías. □

Solución 5

Sea $a_1 \geq a_2, ..., \geq a_n$ los números escritos en las cartas. Si existe d que los divide a todos consideramos $\frac{a_1}{d} \geq \frac{a_2}{d}, ..., \geq \frac{a_n}{d}$ y las condiciones se siguen cumpliendo, así que asumimos que:

$$gcd(a_1, a_2, \ldots a_n) = 1 \tag{2}$$

Sea p primo tal que $p|a_1$.

Claim : p divide a $a_2, a_3, \ldots, a_n$.
Demostración: Sea a_k el primer número de la lista tal que $p \nmid a_k$. Sabemos que

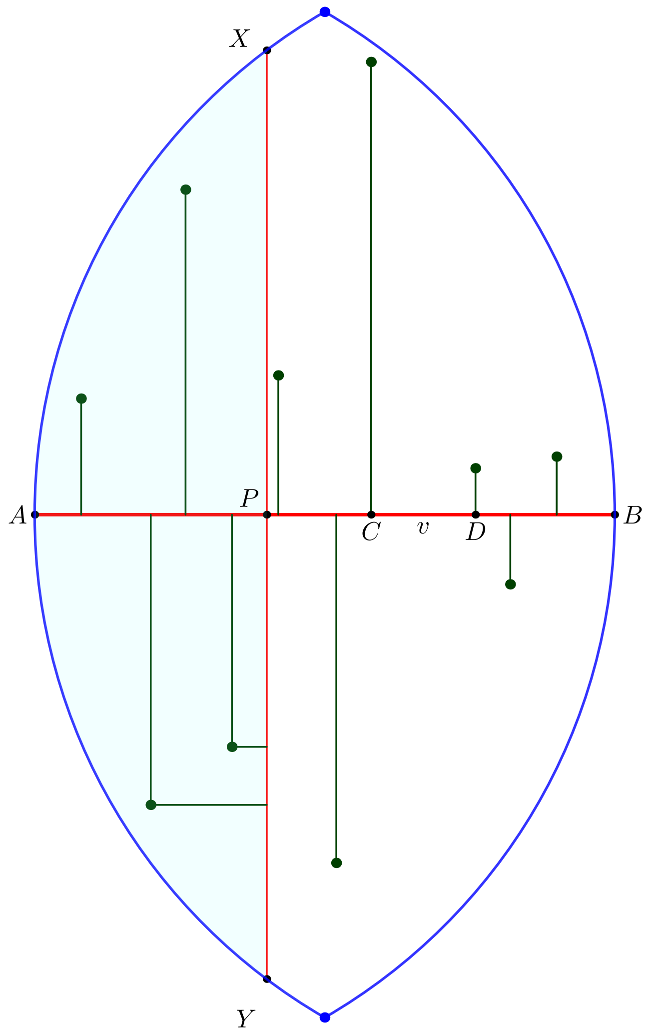
$$\frac{a_1+a_k}{2} = \sqrt[l]{a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_l}} \Rightarrow (a_1+a_k)^l = 2^l a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_l}$$

con $a_{i_1} \geq a_{i_2} \geq \cdots \geq a_{i_l}$. Además, no todos los factores del miembro derecho pueden ser menores o iguales que a_k, de donde $p|a_{i_1}$ lo que implica que $p|a_k$. □

De esta forma todos los números de la lista son divisibles por p, lo que contradice (2), entonces no existe tal p lo que implica que $1 = a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Solución 6

En la figura:



- A, B son los puntos más alejados. Esto implica que el resto de los puntos están incluidos en la intersección de los circulos centrados en A, B de radio $R = \overline{AB} \geq 1$.
- Sea P tal que $AP = \frac{1}{2}$, la cuerda XY es perpendicular a AB en P.
- Sea $\mathcal{T}$ la región más pequeña delimitada por XY y la circunferencia de centro en B y radio BA.
- De los segmentos formados por dos proyecciones consecutivas de puntos de S sobre AB, sea CD el de mayor longitud.

Sea $v \in \mathbb{R}$ mayor estricto que la longitud de CD.

Claim 1: $XY < 2\sqrt{nv}$.
Demostración: Sabemos que $R = AB < (n-1)v$. Por Pitágoras

$$XY = 2\sqrt{R^2 - \left(R - \frac{1}{2}\right)^2} = 2\sqrt{R - \frac{1}{4}} < 2\sqrt{nv}$$

$\square$

Claim 2: $XY > \frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{1}{2v} - 1)$.
Demostración: Sean dos puntos cualesquiera en $\mathcal{T}$, sus proyecciones en XY y AB cumplen que $p_{XY}^2 + p_{AB}^2 \geq 1$, como $p_{AB} \leq \frac{1}{2}$ tenemos que $p_{XY} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Esto implica que

$$XY > \frac{\sqrt{3}}{2}(|\mathcal{T}| - 1).$$

Ahora, proyectando sobre AP los puntos de $\mathcal{T}$,

$$|\mathcal{T}| > \frac{1}{2v}$$

Lo que demuestra nuestro claim. $\square$

Combinando ambos claims obtenemos que

$$2\sqrt{nv} > \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2v} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Sea $C_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$ y sea C_2 tal que $C_2\sqrt{nv} > 2\sqrt{nv} + \frac{\sqrt{3}}{2}$. Combinando todo

$$C_2\sqrt{nv} > \frac{C_1}{v} \Rightarrow v > C_3 n^{-1/3}$$

donde $C_3 = \left(\frac{C_1^2}{C_2^2}\right)^{1/3}$.

Si tomamos como ℓ la mediatriz de CD sabemos que todos los segmentos están a una distancia de ℓ mayor que $Cn^{-1/3}$, donde $C = \frac{C_3}{2}$.

References

[1] https://artofproblemsolving.com

[2] https://web.evanchen.cc/exams/IMO-2020-notes.pdf