IMO 2019 Problemas y Soluciones.

Héctor Raúl Fernández Morales
10001noesprimo@gmail.com

Febrero 02, 2021

Día 1.

Problem 1. *Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros. Determinar todas las funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tales que, para todos los enteros a y b,*

$$f(2a) + f(2b) = f(f(a+b)).$$

Problem 2. *En el triángulo ABC, el punto A_1 está en el lado BC y el punto B_1 está en el lado AC. Sean P y Q puntos en los segmentos AA_1 y BB_1, respectivamente, tales que PQ es paralelo a AB. Sea P_1 un punto en la recta PB_1 distinto de B_1, con B_1 entre P y P_1, y $\angle PP_1C = \angle BAC$. Análogamente, sea Q_1 un punto en la recta QA_1 distinto de A_1, con A_1 entre Q y Q_1, y $\angle CQ_1Q = \angle CBA$. Demostrar que los puntos P, Q, P_1, y Q_1 son concíclicos.*

Problem 3. *Una red social tiene* 2019 *usuarios, algunos de los cuales son amigos. Siempre que el usuario A es amigo del usuario B, el usuario B también es amigo del usuario A. Eventos del siguiente tipo pueden ocurrir repetidamente, uno a la vez:*

> *Tres usuarios A, B, y C tales que A es amigo de B y de C, pero B y C no son amigos, cambian su estado de amistad de modo que B y C ahora son amigos, pero A ya no es amigo ni de B ni de C. Las otras relaciones de amistad no cambian.*

Inicialmente, hay 1010 *usuarios que tienen* 1009 *amigos cada uno, y hay* 1009 *usuarios que tienen* 1010 *amigos cada uno. Demostrar que hay una sucesión de este tipo de eventos después de la cual cada usuario es amigo como máximo de uno de los otros usuarios.*

Día 2.

Problem 4. *Encontrar todos los pares (k, n) de enteros positivos tales que*

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \dots (2^n - 2^{n-1}).$$

Problem 5. *El Banco de Bath emite monedas con una H en una cara y una T en la otra. Harry tiene n monedas de este tipo alineadas de izquierda a derecha. Él realiza repetidamente la siguiente operación: si hay exactamente $k > 0$ monedas con la H hacia arriba, Harry voltea la k-ésima moneda contando desde la izquierda; en caso contrario, todas las monedas tienen la T hacia arriba y él se detiene. Por ejemplo, si $n = 3$ y la configuración inicial es THT, el proceso sería $THT \to HHT \to HTT \to TTT$, que se detiene después de tres operaciones.*

(a) Demostrar que para cualquier configuración inicial que tenga Harry, el proceso se detiene después de un número finito de operaciones.

(b) Para cada configuración inicial C, sea $L(C)$ el número de operaciones que se realizan hasta que Harry se detiene. Por ejemplo, $L(THT) = 3$ y $L(TTT) = 0$. Determinar el valor promedio de $L(C)$ sobre todas las 2^n posibles configuraciones iniciales de C.

Problem 6. *Sea I el incentro del triángulo acutángulo ABC con $AB \neq AC$. La circunferencia inscrita ω de ABC es tangente a los lados BC, CA y AB en D, E y F, respectivamente. La recta que pasa por D y es perpendicular a EF corta a ω nuevamente en R. La recta AR corta a ω nuevamente en P. Las circunferencias circunscritas de los triángulos PCE y PBF se cortan nuevamente en Q.*
Demostrar que las rectas DI y PQ se cortan en la recta que pasa por A y es perpendicular a AI.

Soluciones

Solución 1

Si $f(x) = mx + n$ tenemos que

$$2ma + 2mb + 2n = m(ma + mb + n) + n = m^2a + m^2b + mn + n$$

esto es un polinomio en dos variables por tanto $2m = m^2$ lo que implica que $m = 0$ o $m = 2$. En el primer caso $n = 0$ y en el segundo n puede ser cualquier número real. Por tanto las únicas soluciones lineales o constantes son $\boxed{f(x) = 2x + n}$ y $\boxed{f(x) = 0}$. El siguiente claim demuestra que estas son las únicas soluciones.
Claim: f es lineal. *Demostración:*

- $P(x, 0)$ implica que $f(2x) + 2f(0) = f(f(x))$
- $P(0, x)$ implica que $f(0) + 2f(x) = f(f(x))$, combinando con la anterior

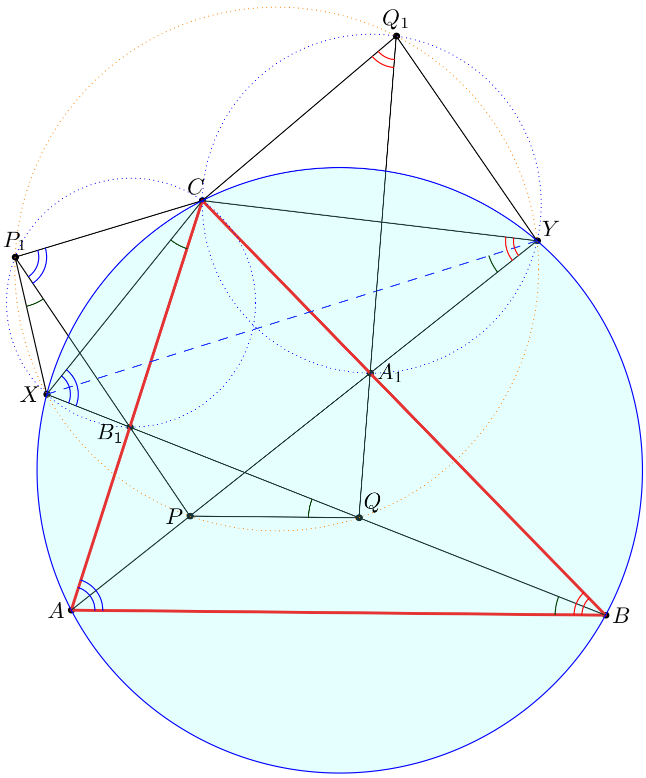
$$f(2x) + f(0) = 2f(x).$$

- sustituyendo lo anterior en la ecuación original $2f(a) - f(0) + 2f(b) = f(f(a + b)) = f(0) + 2f(a + b)$, de donde $\boxed{f(a) + f(b) = f(a + b) + f(0)}$.
- sea $g(x) = f(x) - f(0)$, sustituyendo en la anterior $g(a) + g(b) = g(a + b)$.

La función g es aditiva, como estamos en el conjunto de los enteros es lineal, de donde f es lineal. $\square$

Solución 2

En la figura sean $X = BB_1 \cap (ABC)$ e $Y = AA_1 \cap (ABC)$



- Veamos que $\angle PP_1C = \angle BAC = \angle BXC$ de donde CB_1XP_1 es cíclico. Análogamente CA_1YQ_1.
- Veamos que $\angle XP_1P = \angle XP_1B_1 = \angle XCB_1 = \angle XBA = \angle XQP$ de donde P_1QPX es cíclico. Análogamente Q_1PQY.
- Veamos que $\angle XYP = \angle XYA = \angle XBA = \angle XQP$ de donde $XYQP$ es cíclico.

Combinando las anteriores obtenemos que P_1Q_1YQPX es cíclico lo que demuestra el resultado deseado. $\square$

Solución 3

Consideremos el problema con la típica interpretación de grafos, los vértices son los usuarios y los amigos están conectados por aristas. Llamemos “mutar" al movimiento permitido, además sea $e(G)$ el conjunto de aristas de G.

Claim 1: Sea G un árbol. Cualquier mutación de G lo desconecta en 2 árboles

Demostración: Supongamos que a, b, c son tres vértices, $ab, ac \in e(G)$ y $bc \notin e(G)$. Si quitamos las aristas ab y ac tenemos tres componentes conexas que son tres árboles y al añadir bc tenemos 2 componentes conexas que son 2 árboles. $\square$

La solución del problema está basada en el siguiente claim:

Claim 2: Sea G un grafo conexo. El grafo G siempre puede mutar sin perder la conectividad salvo si es un clique, un ciclo o un árbol.

Demostración: Recordemos que un clique es un subrafo completo. Está claro que

- si G es un clique no podemos mutar,
- si G es un ciclo de longitud 3 no podemos mutar y si tiene longitud mayor al mutar desconectamos un vértice y por último
- si G es un árbol y mutamos el claim 1 nos dice que ya G no es conexo.

Debemos probar que en cualquier otro caso podemos mutar sin desconectar el grafo. Como el grafo no es un árbol contiene un ciclo, sea ℓ un ciclo de longitud mínima:

Caso 1: ℓ tiene longitud mayor que 3. Sabemos que existe $a \in \ell$ y $c \notin \ell$ tal que $ac \in e(G)$, además si $b \in \ell$ y $ab \in e(G)$ entonces $cb \notin e(G)$ porque de lo contrario ℓ no sería mínimo. Veamos que podemos mutar a, b, c y G no se desconecta.

Caso 2: ℓ tiene longitud 3. En este caso sea K el mayor clique contenido en G. Como G no es un clique sabemos que existe $a \in K$ y $c \notin K$ tal que $ac \in e(G)$, además existe $b \in K$ tal que $bc \notin e(G)$ porque de lo contrario K no sería máximal. Veamos que podemos mutar a, b, c y G no se desconecta. $\square$

Volviendo al problema, sea ahora G el grafo asociado al problema.

- G es conexo. De hecho si dos usuarios no son amigos cada uno tiene mínimo 2 amigos por tanto tienen al menos un amigo común. Principio del Palomar (1009+1009+2>2019).
- G no es un ciclo ni se puede convertir en un ciclo. Esto es consecuencia de que mutar conserva la paridad de los grados de los vértices y como al inicio hay 1010 usuarios con grado impar estos se mantienen con grado impar siempre.
- G nunca será un clique. No lo es al inicio pues no lo será nunca porque la cantidad de aristas siempre disminuye en 1.

Conclusión,el claim 2 nos garantiza que podemos mutar sin desconectar el grafo hasta obtener un árbol. Ahora, el claim 1 nos garantiza que podemos mutar de forma aleatoria y estaremos obteniendo componentes conexas que son árboles. Como la cantidad de aristas disminuye en 1 en un número finito de mutaciones llegamos a una posición en la que ningún vértice tiene grado 2.

Solución 4

Recordemos que $v_p(x)$ es la mayor potencia de p que divide a x.
Primeramente sacamos los factores 2 y tenemos que

$$k! = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}(2^0-1)(2^1-1)(2^2-1)\cdots(2^n-1).$$

Recordemos la formula de Legendre $v_p(m!) = \sum_{i=1}^{\infty} \lfloor \frac{m}{p^i} \rfloor$.
Veamos entonces que

$$\frac{n(n-1)}{2} = v_p(k!) = \sum_{i=1}^{\infty} \lfloor \frac{k}{2^i} \rfloor < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k}{2^i} = k(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}) = k \tag{1}$$

La desigualdad es estricta ya que $\lfloor \frac{k}{2^i} \rfloor$ es eventualmente 0.

Veamos que sucede con los factores 3. Sabemos que $3|2^t - 1$ solamente si t es par. Por el teorema de la elevación del exponente

$$v_3(2^{2x} - 1) = v_3(4^x - 1) = v_3(4-1) + v_3(x) = 1 + v_3(x).$$

Aplicando esto a la ecuación y usando Legendre de nuevo obtenemos que

$$\begin{aligned} v_3(k!) &= 1 + v_3(1) + 1 + v_3(2) + \cdots + 1 + v_3(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) \\ &= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + v_3(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor !) \\ &= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2 \cdot 3} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2 \cdot 3^2} \rfloor \ldots \\ &< \frac{n}{2} + \frac{n}{6} + \frac{n}{18} \ldots \\ &< \frac{n}{2}(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots) = \frac{3}{4} n \end{aligned} \tag{2}$$

Por el propio Legendre $v_3(k!) \geq \lfloor \frac{k}{3} \rfloor$, combinando esto con lo anterior obtenemos

$$\lfloor \frac{k}{3} \rfloor < \frac{3}{4} n \Rightarrow k < \frac{9}{4} n + 3$$

Este último resultado unido a (1) implica que $\boxed{\frac{n(n-1)}{2} < \frac{9}{4}n + 3}$. De aquí que $n \leq 6$. Comprobando a mano estos casos obtenemos dos soluciones $(k, n) = (1, 1)$ y $(k, n) = (3, 2)$. $\square$

Solución 5

Veamos que las cadenas las podemos interpretar como vértices de un **grafo dirigido** G_n donde existe una arista de una cadena a otra si esta última es el resultado de hacer la operación mencionada a la primera. La figura siguiente es G_3

$$\begin{tikzcd} TTH \arrow[d] & THH \arrow[l] \\ HTH \arrow[d] & \\ HHH \arrow[d] & \\ HHT \arrow[d] & THT \arrow[l] \\ HTT \arrow[d] & \\ TTT & \end{tikzcd}$$

Veamos que podemos obtener G_n a partir de G_{n-1}. Tomemos dos copias X e Y de G_{n-1}.

- En X tomamos cada cadena de longitud $n-1$ y le añadimos una T al final.
- En Y tomamos cada cadena cambiamos cada letra e invertimos el orden. Finalmente añadimos una H al final.
- Conectamos X e Y con una arista de $HH\dots H$ a $HH\dots HT$.

Está claro que X e Y contienen todas las posibles cadenas. Lo que resta probar es que las aristas son correctas en este nuevo grafo.

- La parte asociada a X es correcta ya que una T al final no cambia las operaciones.
- Para Y, notemos que $X = X_1 \dots X_{n-1}$ tiene k letras H, entonces la cadena modificada tiene $(n-1-k)+1 = n-k$ letras H, de donde $\overline{X}_{n-1}\dots\overline{X}_1 H \mapsto \overline{X}_{n-1}\dots\overline{X}_{k+1}X_k\overline{X}_{k-1}\dots\overline{X}_1 H$ que era lo que necesitábamos.
- Finalmente la arista de Y a X is obviamente correcta.

La figura siguiente representa G_4

$$\begin{array}{ccccccc} TTTH & \leftarrow & THTH & \leftarrow & THHH & \leftarrow & TTHH \\ \downarrow & & & & & & \\ HTTH & \leftarrow & HTHH & & & & \\ \downarrow & & & & & & \\ HHTH & & & & & & \\ \downarrow & & & & & & \\ HHHH & & & & & & \\ \downarrow & & & & & & \\ HHHT & \leftarrow & HTHT & \leftarrow & TTHT & \leftarrow & THHT \\ \downarrow & & & & & & \\ HHTT & \leftarrow & THTT & & & & \\ \downarrow & & & & & & \\ HTTT & & & & & & \\ \downarrow & & & & & & \\ TTTT & & & & & & \end{array}$$

Para el apartado (b) sea f_n la suma de todas las distancias de cada vértice de G_n hasta el vértice $TT\ldots T$. Veamos que $f_n = f_{n-1} + (f_{n-1} + n2^{n-1})$ de donde

$$\frac{f_n}{2^n} = \frac{f_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{n}{2} \Rightarrow E_n = E_{n-1} + \frac{n}{2}$$

Sumando en n obtenemos que $E_n = E_0 + (\frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \ldots \frac{n}{2}) = \frac{n(n+1)}{4}$.

Solución 6

En la figura:

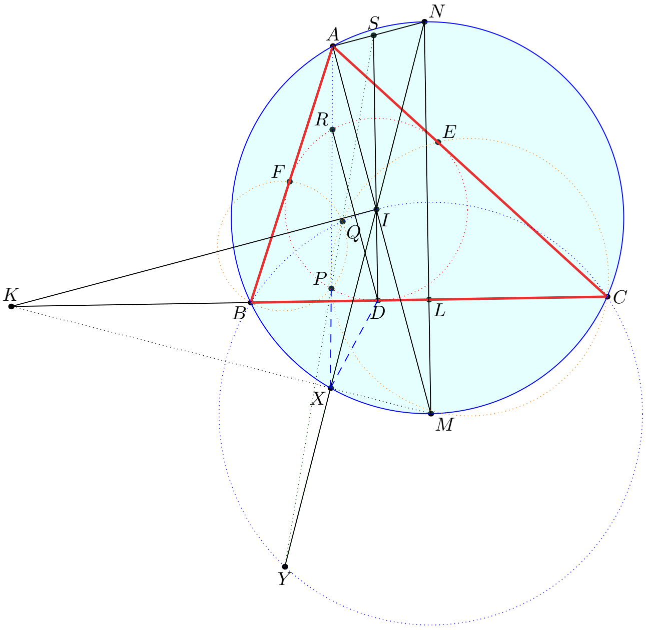
N, M los puntos medios de $\widehat{\mathrm{BAC}}, \widehat{\mathrm{BC}}$ en (ABC)

L el punto medio de BC

$X, Y = NI \cap (ABC), (BIC)$

$K \in BC$ tal que $KI \perp AM$

$S = DI \cap AN$



Claim 1: A, R, X son colineales y $XP = XD$.
Demostración: Inversión centrada en M con radio MB prueba que M, X, K son colineales. RD es la polar de K con respecto a ω, por tanto $RIDXK$ es cíclico, $KNLX$ es cíclico también, de donde

$$\angle XRD = \angle XKD = \angle XNM = \angle XAM,$$

esto junto a $RD \parallel AM$ prueba que A, R, X son colineales.
Notemos que en $(RIDXK)$ se cumple que $\angle RIX = \angle IXD$, además $IP = ID$, esto implica que $\triangle XPI = \triangle XDI$, por tanto $XP = XD$. $\square$

Claim 2: $Q \in (BIC)$ y además Y, P, Q son colineales.
Demostración: Veamos que

$$\begin{aligned}
\angle BQC &= \angle BQP + \angle PQC \\
&= \angle BFP + \angle PEC \\
&= \angle FEP + \angle PEC \\
&= \angle FEC = 180 - (90 - \angle A/2) \\
&= 90 + \angle A/2 = \angle BIC
\end{aligned}$$

por tanto $Q \in (BIC)$.

Por otra parte NB, NC son tangentes a (BIC) y $\angle FAP = \angle BNY$ por tanto $FAEP \sim BNCY(*)$. Ahora, tenemos que

$$\angle YQB = \angle YCB = \angle PEF = \angle PFB = \angle PQB.$$

$\square$

Claim 3: Y, P, S son colineales.
Demostración: Consideremos $t = \frac{AS}{SN} \cdot \frac{PX}{AP} \cdot \frac{NY}{XY}, \quad (**)$

- $\frac{AS}{SN} = \frac{AI}{IM}$.
- Como $\angle MXN = 90$ tenemos que $XY = IX$. Es fácil ver que $\triangle XID \sim \triangle MNI$, con la segunda parte del claim 1 obtenemos que $\frac{PX}{XY} = \frac{DX}{IX} = \frac{IM}{MN}$.
- De $(*)$ obtenemos que $\frac{NY}{AP} = \frac{NM}{AI}$.

sustituyendo lo anterior en $(**)$ tenemos que $t = 1$ y por teorema de Menalao Y, P, S son colineales. $\square$

Con este claim final obtenemos que P, Q, S son colineales lo que concluye el problema.

References

[1] https://artofproblemsolving.com

[2] https://web.evanchen.cc/exams/IMO-2019-notes.pdf