Teoría de Grafos.

Héctor Raúl Fernández Morales
10001noesprimo@gmail.com

abril, 2021

En este documento abordaremos el tema de teoría de grafos específicamente orientado a la resolución de problemas de olimpiadas.

Contents

1 Motivación

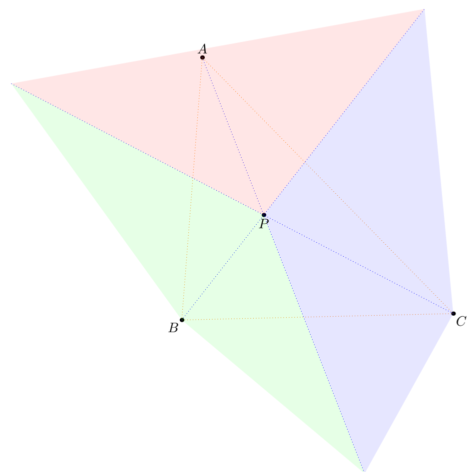
Problem 1 (Ibero 2002)**.** *Sea S un conjunto de 9 puntos del plano tal que no hay 3 colineales. Prueba que para cada punto P de S el número de triángulos formados por puntos de S que tienen a P como punto interior es par.*

Solution. Sea P un elemento de S. Consideremos el grafo G cuyo conjunto de vértices V_G está determinado por los triángulos formados por puntos de $S \backslash P$ que contienen a P.
Sea E_G el conjunto de aristas. Añadimos una arista entre dos elementos de V_G

si los triángulos asociados comparten un lado.

Claim 1

Cada vértice de G tiene grado 5.



Sea $A, B, C \in S$ de modo que $P \in \triangle ABC$. Veamos que un punto localizado en la región(no acotada) roja forma, junto a B y C, un triángulo que contiene a P y además comparte BC con $\triangle ABC$ por tanto genera una arista en el grafo G. Análogamente con el resto de las regiones. Hemos probado que cada punto de $S \setminus \{P, A, B, C\}$ genera exactamente una arista hacia el vértice que determina $\triangle ABC$, de donde el grado de dicho vértice es 5.

Volviendo al problema, notemos que la cantidad de triángulos que contienen a P en el interior es exactamente $|V_G|$. Por otra parte $|E_G| = \frac{5 \cdot |V_G|}{2}$, de donde $|V_G|$ es par. $\square$

2 Terminología y Resultados Básicos

Definition 1 (Grafo)**.** *Un **grafo** G es un par de conjuntos (V_G, E_G), donde V_G es un conjunto de vértices y E_G es una colección de aristas cuyos extremos están en V_G.*

Definition 2 (Terminología)**.**

- *Una arista que empieza y termina en el mismo vértice es un **lazo**. Un grafo donde hay algún par de vértices conectados por más de una arista se dice **multigrafo**. Un grado que no contiene lazos y que no es un multigrafo es un grafo **simple**.*
- *Dos vértices v, w son **adyacentes** si existe una arista que une v con w. Una arista y un vértice se dicen **incidentes** si dicho vértice es uno de los extremos de dicha arista.*
- *El **grado** de un vértice es la cantidad de aristas que inciden en él.*
- *Dado un grafo G el **grafo complemento** $\overline{G}$ es el que tiene los mismos vértices y las aristas son exactamente las aristas que no pertenecen a E_G.*
- *Un **camino** es una sucesión finita de vértices $v_1, v_2, \ldots, v_t$ donde cada v_i es adyacente a v_{i+1}.*
- *La **distancia** entre dos vértices es la longitud del camino más corto que une dichos puntos.*
- *Un **ciclo** es un camino donde el primer vértice y el último son adyacentes.*
- *Un grafo se dice **conexo** si para cualquier par de vértices existe un camino que los une.*
- *En un grafo conexo una **arista de corte** es una arista que si es eliminada el grafo deja de ser conexo.*
- *Un **grafo completo o clique** es un grafo de n vértices con todas las $\binom{n}{2}$ aristas posibles, de denota por K_n.*
- *Un **árbol** es un grafo conexo y sin ciclos.*
- *Una **hoja** es un vértice de grado 1.*

Lemma 1. *Sea G un grafo con n vértices, m aristas y sean $d_1, d_2, \ldots, d_n$ los grados de los vértices, entonces se cumple que*

$$d_1 + d_2 + \cdots + d_n = 2m$$

Proof. Es básicamente conteo doble. □

Lemma 2. *En cualquier grafo hay al menos dos vértices con el mismo grado.*

Proof. Es básicamente principio del palomar. □

Lemma 3. *Sea G un grafo disconexo, entonces $\overline{G}$ es conexo.*

Proof. Sea $u, v \in V_G$.
Si $e_{uv} \notin E_G$ entonces $e_{uv} \in E_{\overline{G}}$ y hay camino de u a v en $\overline{G}$.
Si $e_{uv} \in E_G$ entonces u, v están en la misma componente conexa en G, como G es disconexo podemos tomar $w \in V_G$ en otra componente distinta. Obviamente $e_{uw}, e_{vw} \in E_{\overline{G}}$ y hay un camino de u a v en $\overline{G}$. □

Lemma 4. *En un grafo conexo una arista no es arista de corte si y solo si pertenece a algún ciclo.*

Proof. Si e_{uv} no es de corte implica que no perdemos conectividad al eliminarla de donde hay un camino de u a v que no contiene a e_{uv}, al sumarle a dicho camino esta arista tenemos un ciclo. Por otra parte si e_{uv} pertenece a un ciclo tenemos como mínimo dos maneras de ir a u a v, de donde no perdemos conectividad al eliminarla. □

Lemma 5. *Todo árbol tiene al menos 2 hojas.*

Proof. los extremos del camino maximal son hojas. □

Lemma 6. *Todo árbol de n vértices tiene exactamente $n-1$ aristas.*

Proof. Inducción y el lema anterior. □

Lemma 7. *Un grafo conexo de n vértices tiene al menos $n-1$ aristas.*

Proof. Lema 4 garantiza que los grafos conexos con el menor número de aristas son los árboles. Concluimos con el lema 6. □

Lemma 8. *Sea G un grafo tal que $|E_G| \geq |V_G|$, entonces G contiene un ciclo.*

Proof. Eliminemos los vértices aislados. Eliminemos los vértices con grado 1 y la arista que incide en dicho vértice. Ambas operaciones preservan $|E_G| \geq |V_G|$ y no podemos eliminar todos porque una vez que $|V_G| = 1$ entonces $|E_G| = 0$. Por tanto obtenemos al final un grafo donde todos los grados son mayores o iguales que 2. Empecemos un camino cualquiera, eventualmente chocaremos con dicho camino y entonces tenemos un ciclo. □

Lemma 9. *Para todo grafo G es posible particionar V_G en dos conjuntos de modo tal que para cada vértice al menos la mitad de sus vecinos pertenecen al conjunto contrario.*

Proof. Tomemos la partición $V_G = A + B$ que maximiza la cantidad de aristas que van de A a B. Supongamos que $u \in A$ tal que u tiene n vecinos en A y m en B. Si $n > m$ al pasar u al conjunto B la cantidad de aristas que van de A a B aumenta en $n - m > 0$, contradicción con la maximalidad. De donde dicha partición cumple la propiedad deseada. □

Problem 2 (USAMO 1982). *En una fiesta con n personas en cada grupo de de 4 hay al menos una persona que conoce a las otras 3. Cuál es el menor número de personas que conocen a todas las demas.*

Solution. Se G el grafo asociado.
Supongamos que existe un vértice u tal que $\deg u \leq n-3$, sean v, w tales que $e_{uv}, e_{uw} \notin E_G$. Entonces para cualquier otro vértice z considerando $\{z, u, v, w\}$ obetenemos que $e_{zu}, e_{zv}, e_{zw} \in E_G$. Además, para cualesquiera x, y, considerando $\{x, y, u, v\}$ obetenemos que $xy \in E$. Por tanto $G - \{u, v, w\} = K_{n-3}$ y este es un modelo viable.
Supongamos entonces que $\deg u \geq n-2$ para todo u. Si hay algún algún u tal que $\deg u = n-2$, sea v el único vértice tal que $e_{uv} \notin E_G$, tenemos que también $\deg v = n-2$, de donde para cualquier otro z se cumple que $e_{zu}, e_{zv} \in E_G$. Además, para cualesquiera x, y, considerando $\{x, y, u, v\}$ obetenemos que $xy \in E$. Por tanto $G - \{u, v, \} = K_{n-2}$ y este es un modelo viable.
Finalmente si $\deg u = n-1$ para todo u entonces $G = K_n$.
El primer modelo es el que proporciona el mínimo número de personas, $n-3$, que conocen a todas las demás □

Problem 3 (USAMO 1989). *Los 20 miembros de un club de tenis programan 14 partidas entre ellos. Cada miembro juega al menos una partida. Prueba que existen 6 partidas donde participan 12 jugadores distintos.*

Solution. Sea G el grafo asociado. Supongamos que G tiene k componentes conexas con $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vértices y $e_1, e_2, \ldots, e_k$ aristas cada una. Notemos que $e_i \geq v_i - 1$, de donde

$$14 = \sum e_i \geq \sum (v_i - 1) = 20 - k \implies k \geq 6.$$

Como todas las componentes tienen al menos una arista hemos concluido. □

Problem 4 (USAMO 2018). *Sea p primo y sean $a_1, \ldots, a_p$ enteros. Prueba que existe un entero k tal que los números*

$$a_1 + k, a_2 + 2k, \ldots, a_p + pk$$

producen al menos $\frac{1}{2}p$ restos distintos en la división por p.

Solution. Para cada $k = 0, \ldots, p-1$ sea G_k el grafo con vérticen en $\{1, \ldots, p\}$ donde unimos con una arista los vértices $\{i, j\}$ si y solo si

$$a_i + ik \equiv a_j + jk \pmod{p} \iff k \equiv -\frac{a_i - a_j}{i - j} \pmod{p}.$$

Veamos que cada $\{i, j\}$ aparece en exactamente un grafo G_k, esto implica(palomar) que hay un grafo con a lo sumo $\frac{1}{p}\binom{p}{2} = \frac{1}{2}(p-1)$ aristas. Supongamos que dicho grafo tiene t componentes conexas con $v_1, v_2, \ldots, v_t$ vértices y $e_1, e_2, \ldots, e_t$ aristas cada una. Notemos que $e_i \geq v_i - 1$, de donde

$$\tfrac{1}{2}(p-1) \geq \sum e_i \geq \sum (v_i - 1) = p - t \implies t \geq p - \tfrac{1}{2}(p-1) = \tfrac{1}{2}p.$$

Hemos concluido porque cada componente conexa corresponde a un resto distinto. □

3 Grafos Bipartitos

Definition 3 (Grafo bipartito). *Un grafo se dice* ***bipartito*** *si V_G se puede particionar en dos subcojuntos disjuntos y no vacíos A y B de modo que ninguna arista tiene ambos extremos en el mismo conjunto.*

Lemma 10. *Un grafo es bipartito si y solo si no contiene ciclos de longitud impar.*

Proof. Supongamos que $G = (V_G, E_G)$ tiene bipartición (X, Y).
Sea $C = \{v_0, v_1, \ldots, v_k, v_0\}$ un ciclo cualquiera de longitud $k+1$. Sin pérdida de generalidad consideremos $v_0 \in X$. Es fácil ver que $v_{2i} \in X$ y $v_{2i+1} \in Y$, esto implica que k es impar, de donde C tiene longitud par.
Supongamos ahora que $G = (V_G, E_G)$ no contiene ciclos impares.
Sea u cualquier vértice de V_G. Consideremos la siguiente partición de V_G

$$X = \{x \in V_G : d(u, x) \text{ es par}\}$$
$$Y = \{y \in V_G : d(u, y) \text{ es impar}\}$$

Probemos que la anterior es una bipartición de G. Consideremos $v, w \in X$, sea u_1 el primer punto donde se cortan los caminos mas cortos que unen a v y u y a w y u. Obviamente la distancia en ambos caminos de u_1 a u es la misma, de donde los caminos que unen a v con u_1 y a w con u tienen la misma paridad. Este último hecho demuestra que $e_{vw} \notin E_G$. De manera análoga se procede si $v, w \in Y$, quedando probado que (X, Y) es en efecto una bipartición de G. □

Problem 5 (Tournament of towns 1986). *Hay un torneo de 20 equipos. El primer día cada equipo participa en exactamente una partida con otro equipo del torneo. Lo mismo sucede el segundo día de competición. Prueba que justo antes de la tercera jornada podemos escoger* 10 *equipos que no han jugado entre ellos*

Solution. Consideremos el G donde los elementos de V_G representas los equipos. Conectamos con una arista roja dos equipos si estos jugaron el primer día, y con una arista azul si jugaron el segundo día. Veamos que en un vértice incide o a lo sumo una arista de cada color.
Supongamos que G tiene un ciclo de longitud impar, es fácil ver que la primera y la última arista de este ciclo son del mismo color, contradicción, por tanto G no tiene ciclos de longitud impar implicando que es bipartito.
Por palomar una de las dos particiones tiene 10 o más equipos que no han jugado entre ellos. □

Problem 6 (Clásico). *Encuentra el menor entero positivo n tal que en cualquier conjunto de n números irracionales, hay* 3 *números tal que la suma de cualesquiera dos de estos irracional.*

Solution. Veamos que si $n = 4$ en cualesquiera tres de los siguientes números $\{\pm\sqrt{2}, 1 \pm \sqrt{2}\}$ hay dos que suman racional. Supongamos que $n = 5$. Consideremos el grafo que tiene como vértices los 5 números irracionales y hay arista entre dos de estos si la suma es racional. Veamos que este grafo no contiene ciclos de longitud 3. En efecto, si $x+y, y+z, z+x$ son racionales entonces $(x+y)+(z+x)-(y+z)=2x$ es racional, lo que implica que x es racional, contradicción. Análogamente se demuestra que este grafo no tiene ciclos de longitud 5, de esta forma hemos probado que es bipartito. Una de las dos particiones tiene al menos 3 números que cumplen con la propieda deseada. $\square$

Problem 7 (USA TST 2002)**.** *Sea n un entero positivo y sea S un conjunto de 2^n+1 elementos. Sea f una función que va de $S \times S$ hacia $\{0, \ldots, 2^{n-1}-1\}$. Se sabe que para cualesquiera x, y, z de S, uno de los números*

$$f(\{x,y\}), f(\{y,z\}), f(\{z,x\})$$

es igual a la suma de los otros dos. Prueba que existen a, b, c en S tal que $f(\{a,b\}), f(\{b,c\}), f(\{c,a\})$ son todos ceros.

Solution. Empecemos con un resultado importante

Claim 2

Sea G un grafo completo con $k \geq 3$ vértices, cuyas aristas son coloreadas de blanco o negro de modo que cada triágulo tiene un número par de aristas negras (0 ó 2). Entonces G contiene un subgrafo con $\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$ vértices con todas sus aristas blancas.

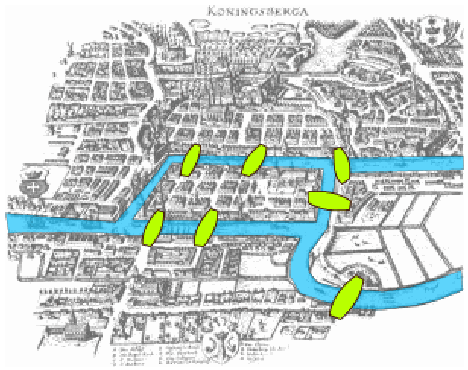
Demostración: Si todos las aristas son blancas el resultado es evidente, así que supongamos que alguna arista es negra. Es fácil comprobar que el subgrafo formado por las aristas negras es bipartito completo. No tiene ciclos de longitud 3 ni ciclos de longitud mayor que o igual que 5. La completitud es bastante fácil de obtener dado que tenemos al menos una arista negra. El resultado es inmediato pues alguna de las particiones tiene más de $\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$ vértices.

Ahora podemos rematar el problema por inducción en n. El caso base es trivial. Supongamos que es cierto para $n-1$. Sea el grafo completo G con vértices en los elementos $k = 2^n + 1$ elementos de S, coloreamos la arista (a, b) de blanco si $f(\{a,b\})$ es par y de negro en otro caso. Aplicando el claim, concluimos que S tiene un subconjunto $\bar{S}$ con $2^{n-1}+1$ elementos tal que todas las parejas de elmentos de $\bar{S}$ son enviadas por f a números pares. Dividamos dichos número por 2 y obtenemos una función $\bar{f}$ de $\bar{S} \times \bar{S}$ a $\{0, 1, \ldots, 2^{n-2}-1\}$ que también satisface la condición para cualesquiera $x, y, z \in \bar{S}$, el problema termina usando la hipótesis de inducción. $\square$

4 Euler y Hamilton

4.1 Euler

Empecemos esta sección con un problema matemático de los más famosos de todos los tiempos. Traslademonos a la ciudad prusiana de Königsberg (hoy en día Kaliningrado, Rusia), a principios del siglo XVIII los ciudadanos de dicha ciudad se cuestionaban si era posible dar un paseo que cruzara los siete puentes(exactamente una vez cada uno) que comunicaban a dos islas centrales como muestra la siguiente foto



Es en 1735 que la bestia parda de Leonhard Euler presenta una solución rigurosa concluyendo que tal paseo es imposible. Veamos ahora por qué, pare ello comencemos con algunas definiciones.

Definition 4 (Camino euleriano). *Un* ***camino euleriano*** *es un camino que incluye cada arista exactamente una vez.*

Definition 5 (Circuito euleriano). *Un* ***circuito euleriano*** *es un camino euleriano que empieza y termina en el mismo vértice.*

Lemma 11. *Sea G un grafo conexo,*

a) G tiene una circuito euleriano si y solo si todos los vértices tienen grado par.

b) G tiene un camino euleriano si y solo si la cantidad de vértices que tienen grado impar es 0 o 2.

c) Si G es dirigido tendrá circuito euleriano si cada vértice tiene grado de entrada igual al grado de salida.

Proof. Sólo probaremos una dirección de a), el resto se le deja al lector que no encontrará problemas para concluir.

Supongamos que G es conexo y que todos los vértices tienen grado par. Empecemos un camino en un vértice v_1, sin repetir aristas, por la condición de paridad sólo podemos detenernos en v_1. Si dicho circuito no contiene todos las aristas entonces por lo menos un vértice del circuito es adyacente a alguna arista no usada. Podemos entonces empezar de nuevo por v_2 y obetener otro circuito que podemos empalmar al ya existente. Como cada vez vamos reduciendo las aristas no usadas en algún momento tendremos un circuito euleriano. $\square$

Remark. *Similar a la prueba anterior es una de las soluciones del problema* 4 *de la IMO de* 1991*. Pero vamos, eso lo sabe cualquiera que esté leyendo esto.*

Es ahora practicamente inmediata la solución de los puentes de Königsberg, dejamos que el lector se meta en la piel de Euler y la formalice.

Otro problema interesante está relacionado con el juego del *dominó*, muy famoso en Cuba mi país natal. En dicha isla son populares dos variantes distintas, la que llamamos *doble* que tiene fichas desde la blanca(cero) hasta el 9 y el *sencillo* cuyas fichas solo llegan hasta el 6. Es bien conocido por todos los cubanos que en uno de estos se pueden colocar todas las fichas seguidas y en el otro no. Es un auténtico caramelo para el lector demostrar ahora para cual se puede y para cual no. Hablando de dominó.

Problem 8 (IMEO 2020)**.** *Sea $n \geq 3$ un número impar. Para cada par de enteros (i, j) con $1 \leq i \leq j \leq n$ tenemos una ficha de dominó, con i escrito en un extremo y j en el otro. Amin comienza a poner fichas en fila de modo que los números en lados adyacentes coinciden. Luego de colocar k fichas se detuvo, Anton se acerca a la configuración y se percata de que no podría colocar el resto de las fichas sin romper las reglas. Cuál es el mínimo valor de k.*

Solution. La respuesta es $k = (3n-5)/2$. Esta es una construcción posible:

$$(2,1),(1,3),(3,4),(4,1),(1,5),(5,6),\ldots,(n-1,1),(1,n).$$

Esto funciona porque la ficha$(1,1)$ no podría ser colocada.

Probemos que $k \geq (3n-5)/2$.

Consideremos la típica iterpretación como K_n con lazos, donde la ficha (i, j) representa la arista que une i y j. Estamos buscando el menor camino P que no es parte de ningún circuito euleriano. Sea $K_n \backslash P$ el grafo que obtenemos al eliminar las aristas de P.

Claim 3

El grafo $K_n \backslash P$ es disconexo.

Proof. Notemos que los vértices de P tienen grado par excepto los extremos x e y. Lo mismo sucede con $K_n \backslash P$. Si este grafo es conexo entonces hay un camino euleriano de x a y. Empalmando dicho camino con P obtendríamos un circuito euleriano, contradicción. $\square$

Separemos ahora K_n en dos componentes A y B mutualmente disconexas. Si $|A|, |B| \geq 2$, entonces P tiene como mínimo $|A||B| \geq 2(n-2) \geq (3n-5)/2$ aristas.

Sin pérdida de generalidad supongamos que A contiene un solo vértice v. Las $n-1$ aristas que salen de v deben estar en P. Además, de tres aristas consecutivas de P, como mucho dos de ellas tienen a v como extremo. de esta condición es fácil deducir que $\frac{2}{3}(k+1) \geq n-1$, que implica que $k \geq (3n-5)/2$. □

Vamos ahora con otro hermoso y difícil problema.

Problem 9 (https://artofproblemsolving.com/community/c6h1900939p13051607). *Decimos que un polígono es rectangular si todos sus ángulos interiores miden $90°$ o $270°$. Sea P un polígono rectangular cuyos lados tienen longitud entera impar. Prueba que P no puede ser cubierto por fichas de 2×1 sin solapamiento.*

Solution. Supongamos que P puede ser cubierto con fichas de 1×2. Sea el grafo G, son las esquinas de las fichas y las aristas son los lados de longitud 2 de dichas fichas, contados dobles en caso de que las fichas compartan un lado de longitud 2.

La observación clave es que cada esquina de P tiene grado 1 y que el resto de los vértices tienen grado par (o bien 2, o bien 4). De esta forma, si empezamos un camino euleriano(c_1) desde una esquina de P (digamos $v \in G$) , este no terminará hasta llegar a otra esquina de P(digamos $v' \in G$).

Si v y v' no son esquinas de un mismo lado de P entonces existe otra esquina entre ambos(digamos $w \in G$). Si empezamos un camino euleriano(c_2) que empieza en w y termina en otra esquina de P(digamos $w' \in G$).

Ahora, dicho lado del polígono no podría tener longitud impar ya que las aristas que unen dichos vertices son de longitud par y paralelas a los ejes del polígono. □

4.2 Hamilton

En esta sección consideraremos grafos simples. Vamos a ver las caraterísticas de los grafos en los que podemos visitar todos sus puntos con un mismo camino o ciclo.

Definition 6 (Camino hamiltoniano). *Un **camino hamiltoniano** es un camino que incluye todos los vértices.*

Definition 7 (Ciclo hamiltoniano). *Un **ciclo hamiltoniano** es un ciclo que incluye todos los vértices.*

En general no es sencillo probar que dicho camino o ciclo existe, no obstante, tenemos esta poderosa herramienta.

Theorem 1 (Dirac). *Sea G un grafo con n vértices, todos con grado al menos $n/2$. Entonces G tiene un ciclo hamiltoniano.*

Proof. Primeramente considerando la menor componente conexa es fácil ver que G es conexo.
Supongamos que el camino más largo tiene n vértices $x_1, \ldots, x_n$. Supongamos que no existe un ciclo de longitud n. Todos los vecinos de x_1 y x_n pertenecen al camino de lo contrario no sería máximo. Ahora todos los vértices tiene grado mayor o igual que $n/2$. Usando PHP es fácil ver que existe k tal que $e_{x_1 x_k} \in E_G$ y $e_{x_n x_{k-1}} \in E_G$, de donde podemos redirigir el camino y obtener un ciclo.
Si el camino más largo no tiene n vértices por el mismo argunmento anterior es un ciclo, como G es conexo, existe algún vértice de los que no está en el ciclo que está conectado a este lo que contradice la maximalidad del camino. $\square$

Con un argumento similar al de la prueba del teorema anterior puede el lector probar el siguiente lemma.

Lemma 12. *Sea G un grafo de n vértices. Sean u, v dos vértices no adyacentes tales que $deg(u) + deg(v) \geq n$. Eontonces G es hamiltoniano si y solo si $G + uv$ es hamiltoniano.*

Vamos ahora con un problema muy chulo

Problem 10. *Cada arista de un grafo completo con 101 vértices es marcado con 1 o con -1.Se sabe que el valor absoluto de la suma de los números marcados en las aristas es menor que 150. Prueba que el grafo contiene un camino que visita todos los puntos exactamente una vez de modo que la suma de dicho camino es cero.*

Solution. Es suficiente probar que hay un ciclo hamiltoniano con suma igual a ± 1, ya que podemos quitar una arista a conveniencia para obtener un camino hamiltoniano de suma 0.

Particionemos las aristas del grafo en 50 ciclos hamiltonianos. En efecto podemos enumerar los vértices desde 1 a 101 y módulo 101 tomar los ciclos

$$1, 1+k, 1+2k, \ldots, 1+100k, 1+101k = 1 \qquad 1 \leq k \leq 50$$

como 101 es primo es fácil comprobar que esos ciclos en efecto lo son y que sus aristas son una particion de las aristas del grafo.

Supongamos que ninguno de estos ciclos tiene suma ± 1. Como la suma en dichos ciclos siempre es impar estas son mayores que 3o menores que -3. La restricción de la suma total de ciclos prohibe que sean todas las sumas mayores que 3 o todas menores que -3. De esta formas tenemos un ciclo C_1 con suma mayor que 3, y un ciclo C_2 con suma menor que -3.

Veamos que podemos convertir C_1 en C_2 intercambiando sucesivamente dos vértices. Esta operación es isomorfa a pasar de una permutación a otra haciendo intercambios sucesivos de dos elementos consecutivos.

Cada operación altera como mucho en 4 ó -4 la suma del ciclo, de esta forma no podría saltar en ningún momento de 3 a -3 y concluimos que entre medias hay un ciclo con suma ± 1. $\square$

5 Árboles

Definition 8 (Árbol)**.** *Un grafo se dice que es un* ***árbol*** *si es conexo y no contiene ciclos.*

6 Turan

7 Matching

8 Teorema del matrimonio

9 Ramsey

Definition 9 (Número Cromático)**.** *El* ***número cromático*** *de un grafo es el mínimo número de colores que se necesitan para colorear los vértices de modo no exista un par de vértices adyacentes con el mismo color.*

10 Planaridad

Definition 10 (Grafo Planar)**.** *Un grafo se dice* ***planar*** *si es posible dibujarlo en el plano sin que los ejes se corten.*

11 Lista de Problemas

Problem 1. *Prueba que en un grupo de* 17 *personas en el cual cada persona conoce exactamente a otras* 4*, existen* 2 *personas que no se conocen y no tienen conocidos en común.*

Problem 2. *Prueba que en todo conjunto de* $2n$ *personas existe una pareja con un número par de amigos en común.*

Problem 3 (IMO shortlist 2002)**.** *En un grupo de 120 personas algunas parejas son amigos. Un cuarteto débil es un grupo de* 4 *personas que contiene exactamente una pareja de amigos. Cuál es el máximo número posible de cuartetos débiles.*

Problem 4 (IMO shortlist 2004)**.** *La siguiente operación es permitida en un grafo finito: escogemos un ciclo de longitud* 4 *y eliminamos una de sus* 4 *aristas. Para un entero* $n \geq 4$*, encuentra el menor número de aristas que podemos obtener aplicando sucesivamente dicha operación a* K_n*.*

Problem 5 (IMO longlist 1983)**.** *Las localidades* $P_1, P_2, \ldots, P_{1983}$ *están conectadas por 10 aerolíneas* $A_1, A_2, \ldots, A_{10}$*. Se conoce que cada par de ciudades están conectadas por algun vuelo que opera en los dos sentidos. Prueba que como mínimo una de las aerolíneas ofrece un trayecto de ida y vuelta con un número impar de paradas.*

Problem 6 (IMO shortlist 2004)**.** *La siguiente operación es permitida en un grafo finito: Escoger un ciclo de longitud* 4 *(si existe), escoger una arista de dico ciclo y eliminarla del grafo. Para un entero finito* $(n \geq 4)$*, encuentra el menor número de aristas que pueden ser obtenidas al aplicar sucesivamente esta operación al grafo completo de* n *vértices* K_n*.*

Problem 7. *Hay* 18 *concursantes en un torneo. En cada ronda los concursantes se emparejan y jugan una partida con la condición de que dos concursantes se enfrentan a lo sumo una vez. Prueba que luego de* 8 *rondas hay* 3 *concursantes que no han jugado entre ellos.*

Problem 8 (USAMO 1986)**.** *Cinco profesores asisten a una conferencia. Cada uno se quedó dormido 2 veces. Para cada par hubo un momento en que ambos estuvieron dormidos. Prueba que hubo un momento donde 3 profesores estuvieron dormidos.*

Problem 9 (https://artofproblemsolving.com/community/c6h1376634p9831629)**.** *Prueba que podemos escribir* 2^n *números alrededor de un círculo, iguales a* 0 *o* 1*, de modo que cualquier cadena de* 0*'s y* 1*'s de longitud* n *puede ser obtenida empezando en algun punto del círculo y leyendo los restantes dígitos en el sentido de las manecillas del reloj.*

Problem 10 (IMO shortlist 2002)**.** *Sea* n *un número positivo par. Prueba que existe una permutación* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *de* $(1, 2, \ldots, n)$ *tal que para todo* $i \in \{1, 2, ..., n\}$*, el número* x_{i+1} *es uno de los números* $2x_i$, $2x_i - 1$, $2x_i - n$, $2x_i - n - 1$*. Los subíndices se consideran cíclicos,* x_{n+i} *es* x_i*.*

Problem 11 (ELMO shortlist 2010)**.** *El juego circular se juega con kn cartas cada una con un número de $1, 2, \ldots, n$ escrito de modo que hay k cartas de cada número. Primero se forman n pilas con k cartas cada una ubicadas boca abajo. El jugador toma una carta de la pila 1 y coloca esa carta boca arriba en el fondo de la pila 1 y hace lo mismo con la pila de la misma numeración de la carta que acaba de tomar. Así sucesivamente, repite la operación hasta que llega a una pila con todas las cartas boca arriba, el jugador gana cuando todas las cartas están boca arriba. Cansado de perder el jugador mira las pilas de antemano y coloca las cartas en el orden que mejor le conviene para ganar. ¿Cuándo es posible hacer este procedimiento y ganar?*

Problem 12 (IMO shortlist 2009)**.** *Hay n circunferencias dibujadas en un pedazo de papel de modo que cualesquiera dos de ellas se cortan en dos puntos y no hay tres de ellas con un punto en común. Turbo el caracol se mueve por las circunferencias de la siguiente manera. Inicialmente se mueve en uno de los círculos en sentido de las manecillas del reloj. Se mantiene en movimiento hasta que llega a un punto de intersección con otra circunferencia. Continua entonces su viaje por el nuevo círculo cambiando el sentido de la ruta. Supongamos que Turbo cubre completamente todos las circunferencias. Prueba que n es impar.*

References

[1] IMO training 2008: Graph Theory, Adrian Tang.

[2] Graph Theory, Po Shen Loh.

[3] https://artofproblemsolving.com