Funciones Generatrices.

Héctor Raúl Fernández Morales
10001noesprimo@gmail.com

Septiembre, 2023

En este documento intentamos cubrir, las principales propiedades sobre funciones generatrices y como usarlas para resolver problemas de olimpiadas.

Contents

1 Definición y propiedades generales **1**
1.1 Problemas Resueltos 3

2 Relaciones de recurrencia **3**

3 Números de Catalan **4**

4 Particiones **6**

5 Función generatriz de segundo tipo **7**
5.1 Problemas Resueltos 7

6 Función generatriz exponencial **9**
6.1 Problemas Resueltos 9

7 Relación con los números complejos **11**
7.1 Problemas Resueltos 11

8 Lista de Problemas **13**

1 Definición y propiedades generales

Sin dudas una de las herramientas más poderosas para contar son las funciones generatrices.

Definición 1: Función generatriz

Sea $a_1, a_2, \ldots$ una sucesión de números. La función generatriz ordinaria asociada a dicha sucesión se define como la serie de potencias

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots . \tag{1}$$

Dos funciones generatrices $f(x), g(x)$ asociadas respectivamente a las sucesiones $\{a_n\}, \{b_n\}$ son consideradas iguales ($f(x) = g(x)$) si y solo si $a_i = b_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

En la suma infinita (1) se asume que x está dentro del conjunto donde dicha serie converge. Para entender qué quiere decir esto hay que conocer fundamentos de matemática superior como son, límite de sucesiones, convergencia de series, etc. En cualquier caso más que las propiedades analíticas de dicha series nos interesan los coeficientes por lo que omitiremos estas cuestiones formales y trabajaremos con dichas series como podemos hacer con los polinomios.

En efecto podemos sumar y multiplicar funciones generatrices. Dadas dos funciones $f(x), g(x)$ asociadas a las sucesiones $\{a_n\}, \{b_n\}$, respectivamente, definimos

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+\cdots .$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x) = a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+\cdots .$$

Lema

Sea $f(x)$ la función generatriz asociada a $\{1,1,1,\ldots\}$. Entonces, $f(x)=\frac{1}{1-x}$.

Demostración. Veamos que

$$\begin{gathered} f(x) = 1+x+x^2+\cdots \\ \Downarrow \\ xf(x) = x+x^2+x^3+\cdots \\ \Downarrow \\ 1+xf(x) = 1+x+x^2+x^3+\cdots = f(x) \end{gathered}$$

despejando $f(x)$ tenemos que $f(x)=\frac{1}{1-x}$. □

La demostración de las siguientes propiedades quedan para el lector.

Propiedades

Sean $f(x), g(x)$ funciones generatrices asociadas a las sucesiones $\{a_n\}, \{b_n\}$, respectivamente. Sea k un entero positivo, entonces tenemos que

- $b_n = a_{n+k}$ para todo n y $a_t = 0$ para todo $t<k$, entonces $f(x) = x^k g(x)$.
- $b_n = a_0+a_1+\cdots+a_n$ para todo n, entonces $g(x)=\frac{f(x)}{1-x}$.
- $b_n = t^n$ para todo n, entonces $g(x)=\frac{1}{1-tx}$.
- $b_n = n$ para todo n, entonces $g(x)=\frac{x}{(1-x)^2}$.
- $b_n = \binom{n}{k}$ para todo n, entonces $g(x)=\frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$.
- $b_n = \binom{n+k}{k}$ para todo n, entonces $g(x)=\frac{1}{(1-x)^{k+1}}$.
- $b_n = \binom{k}{n}$ para todo n, entonces $g(x)=(1+x)^k$.
- $b_n = t^n\binom{k}{n}$ para todo n, entonces $g(x)=(1+tx)^k$.

Estamos considerando k como un entero no negativo y para todo número real r y todo entero positivo n definimos

$$\binom{r}{n} = \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)}{n!}$$

donde $\binom{r}{0} = 1$.

1.1 Problemas Resueltos

Veamos que si en la sucesión $\{a_n\}$ a partir de cierto N todos los elementos son ceros, entonces la función generatriz asociada es la suma finita

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{N-1} x^{N-1},$$

o sea, un polinomio. Por ejemplo la sucesión $\{\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2} \ldots, \binom{n}{n}, 0, 0, \ldots\}$ tiene como función generatriz asociada $(1+x)^n$, esto lo sabemos por la fórmula del binomio de Newton. Muchas veces el problema en cuestión requiere del uso de polinomios y el enfoque de estos como funciones generatrices finitas nos ayuda a llegar a la solución.

Problema. Halla la forma cerrada de la expresión

$$\binom{n}{0}^2 - \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}^2$$

Solución. Sea $A_n = \binom{n}{0}^2 - \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}^2$. Consideremos

$$\begin{aligned} f(x) &= (1-x)^n (1+x)^n \\ &= (1-x^2)^n \\ &= \left(\binom{n}{0} - \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}x^n\right)\left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n\right) \end{aligned}$$

Es fácil ver que el coeficiente de x^n en el desarrollo anterior es precisamente A_n. Por la fórmula del binomio de Newton sabemos que el coeficiente de grado n de $(1-x^2)^n$ es 0 si n es impar y $(-1)^{\frac{n}{2}} \binom{n}{\frac{n}{2}}$ si n es par. □

Problema. [Harvard-MIT 2007] Sea S el conjunto de todas las ternas (i, j, k) de enteros positivos tales que $i + j + k = 17$. Calcula

$$\sum_{(i,j,k) \in S} ijk.$$

Solución. Sea $s_n = \sum_{i+j+k=n} ijk$. Entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} n x^n\right)^3 = \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)^3 = \frac{x^3}{(1-x)^6}.$$

Usando las propiedades anteriores se comprueba fácilmente que $s_{17} = \binom{19}{5}$. □

2 Relaciones de recurrencia

Hay una conexión directa entre las funciones generatrices y las sucesiones definidas recurrentemente.

Ejemplo

Determina la fórmula general de la sucesion definida por $a_{n+1} = 2a_n + 1, \forall \geq 0, a_0 = 0$.

Solución. Sea $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ Veamos que $a_1 = 1$ y

$$\begin{aligned}
2f(x) &= 2a_1x + 2a_2x^2 + \dots \\
&\Downarrow \\
2f(x) + \frac{1}{1-x} &= (2a_1x + 2a_2x^2 + \dots) + (1 + x + x^2 + \cdots) \\
&= a_1 + (2a_1 + 1)x + (2a_2 + 1)x^2 + \dots \\
&= a_1 + a_2x + a_3x^2 + \dots \\
&\Downarrow \\
2xf(x) + \frac{x}{1-x} &= a_1x + a_2x^2 + \cdots = f(x)
\end{aligned}$$

despejando obtenemos $f(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)}$. Descomponiendo en fracciones simples, esto es, calculando A, B tales que $\frac{x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{A}{(1-x)} + \frac{B}{(1-2x)}$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{(1-2x)} - \frac{1}{(1-x)} \\
&= (1 - 2x + 2^2x^2 + \dots) - (1 + x + x^2 + \cdots) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1)x^n
\end{aligned}$$

De esta forma llegamos a que $a_n = 2^n - 1$ para todo $n \geq 0$. $\square$

Sabemos que la sucesión de Fibonacci se define como $F_1 = F_2 = 1$ y $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ para todo $n \geq 0$. Se le sugiere al lector que encuentre la función generatriz asociada a $\{F_n\}$ y calcule la formula para dichos coeficientes.

3 Números de Catalan

Los números de Catalan aparecen en varios contextos, veamos algunas definiciones equivalentes y su conexión con las funciones generatrices.

Definición 2: Números de Catalan

El número de Catalan C_n es el

- número de árboles binarios con n vértices.
- número de sucesiones binarias de n ceros y n unos donde en cada segmento inicial la cantidad de unos es menor o igual a la cantidad de ceros.
- número de caminos de $(0, 0)$ a (n, n) que van solo en dirección arriba o derecha y nunca están por debajo de la diagonal $y = x$.
- número de expresiones con n paréntesis correctamente colocados.
- número de formas de triangular un $(n + 2)-$agono.

Recordemos que un árbol binario es un árbol en el que cada vértice tiene a lo sumo dos aristas salientes, derecha o izquierda. Para contar la cantidad de árboles binarios con $n+1$ vértices, notemos que si quitamos el vértice raiz tenemos un árbol binario derecho de tamaño k y uno izquierdo de tamaño $n-k$. Sumando en k obtenemos que

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k} = C_0 C_n + C_1 C_{n-1} + \cdots + C_n C_0 \tag{2}$$

donde $C_0 = 1$.

Vemos que si consideramos $C(x)$ la función generatriz asociada, entonces

$$\begin{aligned} C(x) &= C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots, \\ C(x)^2 &= C_0^2 + (C_0C_1 + C_1C_0)x + (C_0C_2 + C_1C_1 + C_2C_0)x^2 + \ldots \end{aligned}$$

usando (2) tenemos que

$$C(x)^2 = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots.$$

de esta forma

$$\begin{aligned} xC(x)^2 &= C(x) - 1 \\ x^2C(x)^2 &= xC(x) - x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2C(x)^2 - xC(x) + \frac{1}{4} &= -x + \frac{1}{4} \\ (xC(x) - \frac{1}{2})^2 &= \frac{1-4x}{4} \end{aligned}$$

Aparentemente tenemos dos soluciones

$$xC(x) = \frac{1 + (1-4x)^{\frac{1}{2}}}{2}, \qquad xC(x) = \frac{1 - (1-4x)^{\frac{1}{2}}}{2}$$

No obstante, la primera opción queda descartada puesto que de las propiedades vistas anteriormete deducimos que su termino independiento no es cero. Entonces,

$$xC(x) = \frac{1 - (1-4x)^{\frac{1}{2}}}{2}$$

Veamos ahora que

$$
\begin{aligned}
C_k &= -\frac{1}{2}(-4)^{k+1}\binom{\frac{1}{2}}{k+1} \\
&= \frac{(-1)^k}{2}(4)^{k+1}\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\cdots(\frac{1}{2}-k)}{(k+1)!} \\
&= \frac{(-1)^k}{2}(4)^{k+1}\frac{(-1)(-3)\cdots(-(2k-1))}{2^{k+1}(k+1)!} \\
&= 2^k\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{(k+1)!} \\
&= 2^k k!\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{k!(k+1)!} \\
&= \frac{(2k)!}{(k!)^2(k+1)} \\
&= \frac{1}{(k+1)}\binom{2k}{k}
\end{aligned}
$$

4 Particiones

Una de las aplicaciones más potentes de las funciones generatrices es la de calcular la cantidad de particiones de un número natural.

Definición 3: Partición

Una partición de m es una forma de escribir este número como suma de enteros positivos, sin tener en cuenta el orden. En otras palabras es una sucesión de enteros positivos $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$, donde $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k$ y $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = m$. Sea $\rho(m)$ la cantidad de particiones distintas de m. Por convenio $\rho(0) = 1$

Lema

La función generatriz de la sucesión $\rho(n)$ es

$$F(x) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^i}.$$

Demostración. Una partición de n es equivalente a una sucesión $(a_1, a_2 \dots)$ donde a_i es el número de veces que aparece i en dicha partición, esto implica que $\sum_{i=1}^{n} a_i i = n$.

El número de sucesiones $\{a_i\}$ es el coeficiente de x^n en

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1 + x^i + x^{2i} + x^{3i} + \cdots)$$

ya que cada x^n viene de multiplicar términos de la forma $x^{a_i i}$, dicho término viene del $i-$ésimo factor en el producto anterior. Usando la fórmula de la serie geométrica se tiene el resultado. □

Lema

El número de particiones de n en partes impares es igual al número de particiones de n en partes distintas.

Demostración. Sabemos que si A es la función generatriz asociada a la cantidad de particiones en partes impares, entonces

$$\begin{aligned} A(x) &= (1 + x + x^2 + \dots)(1 + x^3 + x^6 + \dots)(1 + x^5 + x^{10} + \dots)\dots \\ &= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdots \end{aligned}$$

Por otra parte si B es la función generatriz asociada a la cantidad de particiones en partes distintas, entonces

$$\begin{aligned} B(x) &= (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\dots \\ &= \frac{(1-x)(1+x)}{1-x} \cdot \frac{(1-x^2)(1+x^2)}{1-x^2} \cdot \frac{(1-x^3)(1+x^3)}{1-x^3} \cdots \\ &= \frac{1-x^2}{1-x} \cdot \frac{1-x^4}{1-x^2} \cdot \frac{1-x^6}{1-x^3} \cdots \\ &= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdots \\ &= A(x) \end{aligned}$$

Como A y B tienen la misma función generatriz el resultado es inmediato. $\square$

5 Función generatriz de segundo tipo

Definición 4: Función generatriz de segundo tipo

Sea $a_0, a_1, a_2, \dots$ una sucesión de números enteros. La función generatriz de segundo tipo asociada a dicha sucesión se define como la serie de potencias

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{a_n}.$$

5.1 Problemas Resueltos

Problema. [Example 8.7[1]] Sean $(a_1, a_2, \dots a_n)$ y $(b_1, b_2, \dots b_n)$ dos n-tuplas de enteros distintas (no ordenadas), de modo que

$$a_1 + a_2, a_1 + a_3 \dots a_{n-1} + a_n (\text{ todas las sumas } a_i + a_j, 1 \le i < j \le n)$$

y

$$b_1 + b_2, b_1 + b_3 \dots b_{n-1} + b_n (\text{ todas las sumas } b_i + b_j, 1 \le i < j \le n)$$

coinciden salvo permutación. Prueba que n es potencia de 2.

Solución. Primero veamos que para una constante c las n-tuplas $(c+a_1, c+a_2, \dots c+a_n)$ y $(c+b_1, c+b_2, \dots c+b_n)$ también satisfacen las condiciones del problema, por tanto podemos considerar que dichas n-tuplas están formadas por enteros positivos.

Sean ahora $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x^{a_i}$ y $g(x) = \sum_{i=1}^{n} x^{b_i}$. Veamos que

$$f(x)^2 = \sum_{i=1}^{n} x^{2a_i} + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n}^{n} x^{a_i+a_j} = f(x^2) + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n}^{n} x^{a_i+a_j}$$

análogamente

$$g(x)^2 = g(x^2) + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n}^{n} x^{b_i+b_j}$$

de donde $f(x)^2 - g(x)^2 = f(x^2) - g(x^2)$. Como $f \neq g$ tenemos que

$$f(x) + g(x) = \frac{f(x^2) - g(x^2)}{f(x) - g(x)}$$

sabemos que $f(1) = g(1) = n$, esto implica que existe k tal que

$$f(x) - g(x) = (x-1)^k h(x)$$

donde $h(1) \neq 0$. Sustituyendo obtenemos

$$f(x) + g(x) = \frac{(x^2-1)^k h(x^2)}{(x-1)^k h(x)} = \frac{(x+1)^k h(x^2)}{h(x)}.$$

Evaluando en 1 obtenemos que $2n = f(1) + g(1) = 2^k$, de donde n es una potencia de 2. □

Problema. [IMO Short List 1998] Sea $a_0, a_1, a_2, \dots$ una sucesión creciente de enteros no negativos de modo que todo entero no negativo puede ser expresado de forma única como $a_i + 2a_j + 4a_k$, i, j, k no necesariamente distintos. Determina a_{1998}.

Solución. Sea $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} x^{a_i}$. La condición dada implica que

$$f(x)f(x^2)f(x^4) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

de donde

$$f(x^2)f(x^4)f(x^8) = \frac{1}{1-x^2}.$$

de esta forma $f(x) = (1+x)f(x^8)$ y recursivamente obtenemos que

$$f(x) = (1+x)(1+x^8)(1+x^{8^2})\cdots$$

Si desarrollamos el producto nos damos cuenta que los exponentes $a_0, a_1, a_2 \dots$ son precisamente los enteros no negativos que escritos en base 8 solo tienen dígitos 0 y 1. Como $1998 = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10}$ entonces

$$a_{1998} = 8 + 8^2 + 8^3 + 8^6 + 8^7 + 8^8 + 8^9 + 8^{10}.$$

□

6 Función generatriz exponencial

Definición 5: Función generatriz exponencial

Sea $a_0, a_1, a_2, \ldots$ una sucesión de números. La función generatriz exponencial asociada a dicha sucesión se define como la serie de potencias

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}.$$

Propiedades

- La función generatriz exponencial de $(1, 1, \ldots)$ es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

- La función generatriz exponencial de $(0!, 1!, 2!, \ldots)$ es

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! \frac{x^n}{n!} = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

- La función generatriz exponencial de $(1, k, k^2, \ldots)$ es

$$\sum_{n=0}^{\infty} k^n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(kx)^n}{n!} = e^{kn}$$

Lema

Sea a_r la cantidad de $r-$permutaciones del multiconjunto

$$\{n_1 \cdot b_1, n_2 \cdot b_2, \ldots n_k \cdot b_k.\}$$

Entonces la función generatriz exponencial asociada a $\{a_r\}$ es

$$\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n_1}}{n_1!}\right)\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n_2}}{n_2!}\right) \cdots \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n_k}}{n_k!}\right)$$

o sea, a_r es el coeficiente de $\frac{x^r}{r!}$ en el producto anterior.

6.1 Problemas Resueltos

Problema. [Example 5.4.5[3]] ¿Cuántas palabras de 4 letras se pueden formar usando letras de la palabra SOLLOZO?

Solución. Sea a_r el numero de $r-$permutaciones del multiconjunto

$$\{3 \cdot O, 2 \cdot L, 1 \cdot S, 1 \cdot Z\}$$

Entonces la función generatriz exponencial para $\{a_r\}$ es

$$\Big(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\Big)\Big(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\Big)\Big(1+\frac{x}{1!}\Big)\Big(1+\frac{x}{1!}\Big).$$

Expandiendo obtenemos que el término de grado 4 es $\frac{19}{4}x^4$, por tanto la cantidad buscada es $4!\frac{19}{4}$. □

Problema. [IMO 2008] Sean n y k enteros positivos tales que $k \geq n$ y $k-n$ es par. Se tienen $2n$ lámparas numeradas $1, 2, \ldots, 2n$, cada una de las cuales puede estar encendida o apagada. Inicialmente todas las lámparas están apagadas. Se consideran sucesiones de pasos: en cada paso se selecciona exactamente una lámpara y se cambia su estado (si está apagada se enciende, si está encendida se apaga).

Sea N el número de sucesiones de k pasos al cabo de los cuales las lámparas $1, 2, \ldots, n$ quedan todas encendidas, y las lámparas $n+1, \ldots, 2n$ quedan todas apagadas.

Sea M el número de sucesiones de k pasos al cabo de los cuales las lámparas $1, 2, \ldots, n$ quedan todas encendidas, y las lámparas $n+1, \ldots, 2n$ quedan todas apagadas sin haber sido nunca encendidas. Calcular la razón $\frac{N}{M}$.

Solución. Let S el conjunto de las $2n$-tuples $(a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n)$ tales que $\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i = k$ donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son impares y $b_1, b_2, \ldots, b_n$ son pares.
Observemos que una tupla $(a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n)$ genera exactamente

$$\frac{k!}{a_1!a_2!\cdots a_n!b_1!b_2!\cdots b_n!}$$

sucesiones válidas de k pasos. De donde N es el coeficiente de x^k en la función generatriz exponencial

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\sum_{a_i\geq 0 \text{ impar}} \frac{1}{a_i!}x^{a_i}\right)^n \left(\sum_{b_i\geq 0 \text{ par}} \frac{1}{b_i!}x^{b_i}\right)^n \\ &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^n \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^n \\ &= \left(\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

De la misma forma la función generatriz explonencial para M es $g(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^n$. Tenemos que $f(x) = \frac{g(2x)}{2^n}$ lo que implica $[f]_k = \frac{2^k[g]_k}{2^n}$, de donde

$$\frac{N}{M} = \frac{[f]_k}{[g]_k} = 2^{k-n}.$$

□

7 Relación con los números complejos

Los números complejos suelen aparecer con relativa frecuencia en la resolución de problemas de olimpiadas. La conexión con las funciones generatrices es muy potente y ha generado soluciones de extrema belleza.

En esta sección se asume que el lector está familiarizado con la representación exponencial de los números complejos, con conceptos como raíz de la unidad, raíz primitiva, etc.

El siguiente lema es un potentísimo resultado con muchas aplicaciones en las olimpiadas, el lector interesado puede encontrar su demostración en [2].

Lema

Si p es un número primo y $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$ son números racionales que satisfacen

$$a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + \cdots + a_{p-1}\omega^{p-1} = 0,$$

donde ω es raíz primitiva p-ésima de la unidad, entonces

$$a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_{p-1}.$$

7.1 Problemas Resueltos

Problema. [China 1999] Dado un conjunto A, sea $s(A)$ la suma de los elementos de A (Si $A = \emptyset,\ s(A) = 0$.) Sea $S = \{1, 2, \ldots, 1999\}$. Para $r = 0, 1, 2, \ldots 6$ se defin

$$T_r = \{T | T \subseteq S,\ s(T) \equiv r \pmod{7}.\}$$

Calcula el cardinal de T_r para cada r.

Solución. Sea

$$f(x) = (1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{1999}) = \sum_{n=0} c_n x^n.$$

Sea $\omega = e^{\frac{2\pi i}{7}}$. Veamos que

$$\frac{x^7-1}{x-1} = (x-\omega)(x-\omega^2)\cdots(x-\omega^6).$$

Evaluando en -1 obtenemos que $(1+\omega)(1+\omega^2)\cdots(1+\omega^6) = 1$. Usando esto llegamos a que

$$\begin{aligned}
f(\omega) &= (1+\omega)(1+\omega^2)\cdots(1+\omega^{1995})(1+\omega^{1996})(1+\omega^{1997})(1+\omega^{1998})(1+\omega^{1999}) \\
&= \Big((1+\omega)(1+\omega^2)\cdots(1+\omega^7)\Big)^{285}(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^3)(1+\omega^4) \\
&= 2^{285}(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^3)(1+\omega^4) \\
&= 2^{285}(1+\omega^3).
\end{aligned}$$

por otra parte

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{1999000} c_n\omega^n &= \sum_{r=0}^{6}\sum_{k=0} c_{7k+r}\omega^{7k+r} = \sum_{r=0}^{6}\sum_{k=0} c_{7k+r}\omega^r. \\
&= |T_0| + |T_1|\omega + |T_2|\omega^2 + \cdots + |T_6|\omega^6
\end{aligned}$$

Combinando los dos últimos resultados obtenemos que

$$(|T_0| - 2^{285}) + |T_1|\omega + |T_2|\omega^2 + (|T_3| - 2^{285})\omega^3 + |T_4|\omega^4 + |T_5|\omega^5 + |T_6|\omega^6 = 0.$$

El lema de esta sección nos garantiza entonces que

$$|T_0| - 2^{285} = |T_1| = |T_2| = |T_3| - 2^{285} = |T_4| = |T_5| = |T_6|$$

Usando que $|T_0| + |T_1| + |T_2| + |T_3| + |T_4| + |T_5| + |T_6| = 2^{1999}$ se obtiene que

$$|T_r| = \begin{cases} \frac{2^{1999}+5\cdot 2^{285}}{7} & r = 0, 3. \\ \frac{2^{1999}-2^{286}}{7} & r = 1, 2, 4, 5, 6. \end{cases}$$

□

Problema. [IMO 1995] Sea p un primo impar. ¿Cuántos subconjuntos del conjunto $\{1, 2, dots, 2p\}$ tienen p elementos la suma de dichos elementos es múltiplo de p?

Solución. Sea $\omega = e^{\frac{2\pi i}{p}}$, tenemos entonces

$$\prod_{k=1}^{2p}(x - \omega^k) = (x^p - 1)^2 = x^{2p} - 2x^p + 1. \tag{3}$$

Definimos ahora

$$t(\omega) = \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_p \le 2p} \omega^{j_1}\omega^{j_2} \ldots \omega^{j_p}.$$

Usando Vieta en (3) obtenemos que $t(\omega) = 2$. Por otra parte

$$\begin{aligned} \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_p \le 2p} \omega^{j_1}\omega^{j_2} \ldots \omega^{j_p}. &= \sum_{r=0}^{p-1} \sum_{\substack{1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_p \le 2p \\ j_1+j_2+\ldots+j_p \equiv r \pmod p}} \omega^r \\ &= c_0 + c_1\omega + c_2\omega^2 + \cdots + c_{p-1}\omega^{p-1}, \end{aligned}$$

donde c_i es el cardinal de $\{(j_1, j_2, \ldots, j_p) | 1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_p \le 2p, j_1 + j_2 + \ldots + j_p \equiv r \pmod p)\}$. Combinando los dos resultados

$$(c_0 - 2) + c_1\omega + \ldots + c_{p-1}\omega^{p-1} = 0.$$

lo que implica que

$$c_0 - 2 = c_1 = c_2 = \ldots = c_{p-1}.$$

Teniendo en cuenta que, $c_0 + c_1 + \ldots + c_{p-1} = \binom{2p}{p}$, concluimos que

$$a_0 = \frac{1}{p}\left\{\binom{2p}{p} - 2\right\} + 2.$$

□

8 Lista de Problemas

Problema 1. Comparando coeficientes en $(x+1)^{a+b} = (x+1)^a(x+1)^b$, demuestra la identidad de Vandermonde

$$\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}.$$

Problema 2. Halla la función generatriz de $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$.

Problema 3. [7] Encuentra el número de formas de cambiar n euros en modenas de 1 y 2 euros (Sin tener en cuenta el orden).

Problema 4. Sea n un entero positivo. De cuántas formas podemos llenar una bolsa con n frutas dada las siguentes restricciones:

- el número de manzanas debe ser par,
- el número de plátanos debe ser múltiplo de 5,
- puede haber a lo sumo 4 naranjas,
- puede haber a lo sumo una pera.

Problema 5. [USAMO 1991] Dado un conjunto S, sea $\sigma(S)$ y $\pi(S)$ la suma y el producto de sus elementos respectivamente. Prueba que

$$\sum \frac{\sigma(S)}{\pi(S)} = (n^2+2n) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)(n+1),$$

donde Σ indica la suma sobre los subconjuntos no vacíos S de $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Problema 6. [Putnam 1957] Para un entero positivo n, sea $\alpha(n)$ el número de representaciones de n como suma de $1's$ y $2's$, teniendo en cuenta el orden y sea $\beta(n)$ el número de prepresentaciones de n como suma de enteros mayores que 1, teniendo en cuenta el orden. Prueba que $\alpha(n) = \beta(n+2)$.

Problema 7. [Identidad de Euler] Sea

$$f(x) = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots$$

Prueba que

$$[f]_n = \begin{cases} (-1)^k, & \text{si } n = \frac{3k^2 \pm k}{2}. \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Problema 8. [APMO 1998] Sea F el conjunto de todas las n-tuplas $(A_1, \ldots, A_n)$ tales que cada A_i es un subconjunto de $\{1, 2, \ldots, 1998\}$. Sea $|A|$ el cardinal de A. Calcula

$$\sum_{(A_1,\ldots,A_n)\in F} |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|$$

Problema 9. [Rumanía 2003] ¿Cuántos números de n dígitos, cuyos dígitos pertenencen a $\{2, 3, 7, 9\}$ son divisibles por 3?.

Problema 10. [Argentina 1996, Cuba 2002] ¿Cuántos números de 15 dígitos que utilizan exclusivamente los dígitos 3 y 8 son múltiplos de 11?

Problema 11. Sea n un entero positivo. Prueba que el número de particiones de n en partes impares mayores que 1 es igual al número de particiones de n en partes distintas ninguna de las cuales es potencia de 2.

Problema 12. [Mathematial Reflections, O107] Sean p_1, p_2, p_3 primos distintos y sea n un entero positivo. Encuentra el número de funciones $f : \{1, 2, \ldots 2n\} \to \{p_1, p_2, p_3\}$ para las cuales $f(1)f(2)\cdots f(2n)$ es cuadrado perfecto.

Problema 13. ¿Cuántos subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, 2000\}$ tienen la suma de sus elementos divisible por 5?

Problema 14. Sean p, q primos impares y distintos. Cuántos subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, pq\}$ de tamaño pq tienen la suma de sus elementos divisible por pq.

Problema 15. Sea n un entero positivo. Se define N_k como el número de pares (a, b) de enteros no negativos tales que $ka + (k+1)b = n + 1 - k$. Calcula $N_1 + N_2 + \cdots + N_{n+1}$.

Problema 16. [IMO Short List 2002] Sean m y n enteros mayores que 1 y sean $a_1, a_2, \ldots a_n$ enteros ninguno de los cuales es divisible por m^{n-1}. Prueba que podemos encontrar enteros $e_1, e_2, \ldots, e_n$, no todos 0 tales que $|e_i| < m$ para todo i y $m^n | e_1a_1 + e_2a_2 + \cdots + e_na_n$.

Problema 17. [7] ¿Puede el conjunto de los números enteros positivos ser particionado en una cantidad finita(mayor que 1) de progresiones aritméticas, donde no hay dos con la misma diferencia?

Problema 18. [Putnam 2018] Prueba que el número de tuplas de longitud 2018 cuyas entradas pertenecen a $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10\}$ y suman 3860, es como máximo

$$2^{3860} \cdot \left(\frac{2018}{2048}\right)^{2018}$$

Problema 19. [USA TSTST 2018] Sea $S = \{1, 2, \ldots, 100\}$, para todo entero positivo n se define

$$T_n = \{(a_1, a_2, \ldots a_n) \in S^n | a_1 + a_2 + \cdots + a_n \equiv 0 \pmod{100}.\}$$

Determina cuáles n tienen la siguiente propiedad: Si coloreamos de rojo cualesquiera 75 elementos de S, como mínimo la mitad de las n-tuplas de T_n tienen un número par de coordenadas rojas.

Problema 20. [China 1996, [7]] Sea n un entero positivo. Encuentra el número de polinomios $P(x)$ con coeficientes en $\{0, 1, 2, 3\}$ tales que $P(2) = n$.

Problema 21. Sean $A_1, A_2 \ldots$ y $B_1, B_2, \ldots$ conjuntos tales que $A_1 = \emptyset$, $B_1 = \{0\}$,

$$A_{n+1} = \{x + 1 | x \in B_n\}, \qquad B_{n+1} = A_n \cup B_n - A_n \cap B_n,$$

para todos los enteros positivos n. Determina todos los enteros positivos n tales que $B_n = \{0\}$.

Problema 22. [7] Un rectángulo de $a \times b$ puede ser cubierto con rectángulos de dimensiones $p \times 1$ y $1 \times q$, donde a, b, p, q son enteros positivos. Prueba que $p|a$ o $q|b$.

Problema 23. [American mathematical monthly, [9]] Prueba que con el calendario contemporario el día 13 de cada mes es más probable que sea viernes.

References

[1] A path to combinatorics for undergraduates, Titu Andreescu, Zuming Feng.

[2] Problems from the book, Titu Andreescu.

[3] Principles and Techniques in Combinatorics, Chen Chuan-Chong, Koh Khee-Meng.

[4] Problem Solving Methods in Combinatorics, Pablo Soberon.

[5] Lectures notes in Combinatorial Analysis at MIT, Rachel Wu.

[6] Lecture 18, Holden Lee.

[7] Mathematical Excallibur, Volume 13, Number 5.

[8] Lecture Notes, Yufei Zhao.

[9] Generating Functions, Milan Nocakovic.

[10] https://artofproblemsolving.com/community