Ecuaciones Funcionales.

Héctor Raúl Fernández Morales
hectorraulfm@gmail.com

Enero, 2021

En este documento desarrollamos los temas más relevantes relacionados con Ecuaciones Funcionales:

1 Definición y principales conceptos

Definition 1. *(Función) Sean X e Y conjuntos. Una functión $f : X \to Y$ es una relación tal que a cada elemento x de X se le asigna un único elemento de Y que denotamos por $f(x)$. El conjunto X donde está definida la función se denomina* ***dominio de*** *f, el conjunto de valores que toma la función $f(X) \subseteq Y$ se denomina* ***imagen de*** *f.*

Definition 2. *(Inyectividad) Una functión $f : X \to Y$ se dice* ***inyectiva*** *si es "una a uno", es decir, si $f(x) = f(x')$ implica necesariamente que $x = x'$. En otras palabras para todo $y \in f(X)$ existe un único $x \in X$ tal que $f(x) = y$.*

Definition 3. *(Sobreyectividad) Una functión $f : X \to Y$ se dice* ***sobreyectiva*** *si para todo $y \in Y$ existe al menos un $x \in X$ tal que $f(x) = y$, es decir, $f(X) = Y$.*

Definition 4. *(Biyectividad) Una functión $f : X \to Y$ se dice* ***biyectiva*** *si es inyectiva y sobreyectiva, es decir, para todo $y \in Y$ existe un único un $x \in X$ tal que $f(x) = y$.*

Definition 5. *(Inversa) Sea $f : X \to Y$ inyectiva. Entonces existe $f^{-1} : f(X) \subseteq Y \to X$ tal que $f^{-1}(f(x)) = x$ para todo $x \in X$ y $f(f^{-1}(x)) = x$ para todo $x \in f(X)$. En particular si f es biyectiva entonces f^{-1} está difinida en todo Y.*

Definition 6. *(Involución) Una functión $f : X \to X$ se dice* ***involución*** *si $f(f(x)) = x$ para todo $x \in X$.*

Lemma 1. *Si $f : X \to X$ es una* ***involución****, entonces f es una biyección.*

Proof. Veamos que $f(a) = f(b) \Rightarrow f(f(a)) = f(f(b)) \Rightarrow a = b$ de donde f es inyectiva. La sobreyectividad es directa ya que $f(a)$ es enviada a a. $\square$

Definition 7. *(Monotonía) Una functión $f : X \to Y$ se dice* ***monótona creciente(decreciente)*** *en el intervalo $I \subseteq X$ si para cualesquiera $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 > x_2$ tenemos que $f(x_1) \geq f(x_2)(f(x_1) \leq f(x_2))$.*

Definition 8. *(Paridad) Una functión $f : X \to Y$ se dice* ***par(impar)*** *si $f(x) = f(-x)(f(x) = -f(-x))$.*

2 Ecuación de Cauchy

Muchas ecuaciones funcionales pueden ser reducidas a la siguiente ecuación

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

En esta sección nos limitaremos a enunciar los resultados principales relacionados con esta ecuación. No seremos exahustivos en ninguno de los casos, para más detalles se puede consultar [4].

Theorem 1 (Ecuación de Cauchy, caso Racional)**.** *Sea $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ una función que cumple con la ecuación de Cauchy, entonces existe $k \in \mathbb{Q}$ tal que $f(x) = kx$ para todo $x \in \mathbb{Q}$.*

En el caso real necesitamos exigir alguna condición de regularidad extra en la función f. Para encontrar funciones no lineales que cumplan la ecuación de Cauchy necesitamos conocimientos de espacios vectoriales que escapan al alcance de las olimpiadas de matemáticas, para más detalles consultar [3].

Theorem 2 (Ecuación de Cauchy, caso Real)**.** *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que cumple con la ecuación de Cauchy, entonces cualquiera de las siguientes propiedades*

- *f es continua en un intervalo de $\mathbb{R}$.*
- *f es monótona en un intervalo de $\mathbb{R}$.*
- *f es acotada en un intervalo de $\mathbb{R}$.*

implica que existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = kx$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

3 Problemas Resueltos

Problem 1 (Ibero 2020/P5)**.** *Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que*

$$f(xf(x-y)) + yf(x) = x + y + f(x^2),$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

Solution. Sea $P(x, y)$ la identidad $f(xf(x-y)) + yf(x) = x + y + f(x^2)$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

- $P(0, 1)$ implica que $f(0) = 1$.
- $P(1, 1)$ implica que $f(1) = 2$.
- $P(1, 1-x)$ implica que $f(f(x)) = x + 2$, de donde f es biyectiva.

Ahora, para x arbitrario sea y tal que $f(x-y) = x$. Entonces,

- $P(x,y)$ implica que $yf(x) = x + y$ $(*)$.
- Sabemos que $f(f(x-y)) = x - y + 2$ y que $f(f(x-y)) = f(x)$, de donde $f(x) = x - y + 2$
- Sustituyendo esto úlyimo en $(*)$ tenemos que $y(x - y + 2) = x + y \Rightarrow (y-1)(y-x) = 0$.
- $y = x$ no tiene sentido, de donde $y = 1$ y obtenemos que $f(x-1) = x$ que implica que $f(x) = x + 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, la cual se comprueba que cumple P.

□

Problem 2 (Vietnam 2017)**.** *Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen:*

$$f(xf(y) - f(x)) = 2f(x) + xy$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

Solution. Sea $P(x,y)$ la identidad $f(xf(y) - f(x)) = 2f(x) + xy$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

- $P(1,y)$ implica que $f(f(y) - f(1)) = 2f(1) + y$ para todo $y \in \mathbb{R}$, de donde f is biyectiva.
- Sea a, b tales que $f(a) = 0$ y $f(b) = 1$, entonces $P(a,b)$ implica que $0 = ab$ de donde $f(0) = 0$ ó $f(0) = 1$.
- Si $f(0) = 0$, $P(x,0)$ implica $f(-f(x)) = 2f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por la sobreyectividad, $f(-x) = 2x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, que se comprueba fácilmente que no es solución.
- Entonces $f(0) = 1$. $P(0,0)$ implica que $f(-1) = 2$ y $P(1,1)$ implica que $f(0) = 2f(1) + 1 \implies f(1) = 0$.
- $P(1,x)$ implica que $f(f(x)) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, de donde $f(2) = -1$.
- $P(x,2)$ implica que $f(-x - f(x)) = 2f(x) + 2x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- Sea z tal que $f(z) = f(x) + x$, del apartado anterior $f(-f(z)) = 2f(z)$. Por otra parte $P(z,1)$ implica que $f(-f(z)) = 2f(z) + z$. Combinando ambas obtenemos que $z = 0$ de donde $f(x) = 1 - x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, que se combrueba que satisface P.

□

Problem 3 (IMO 1994/P5)**.** *Sea S el conjunto de los números reales estrictamente mayores que -1. Encuentra todas las funciones $f : S \to S$ que satisfacen:*

(a) $f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$ *para todos $x, y \in S$;*

(b) $\frac{f(x)}{x}$ *es estrictamente creciente en cada uno de los intervalos* $-1 < x < 0$ *y* $0 < x$.

Solution. Sean $I_1 = (-1, 0)$ e $I_2 = (0, \infty)$. Veamos que (b) implica la ecuación $f(x) = x$ tiene como mucho una solución en cada uno de estos intervalos$(*)$. Ahora,

- Sea $u \in I_1$ tal que $f(u) = u$. Haciendo $x = y = u$ en (a) obtenemos, $f(u^2 + 2u) = u^2 + 2u$. Es fácil ver que $u^2 + 2u^{\in} I_1$ lo que contradice $(*)$, de donde f no tiene puntos fijos en I_1.
- Análogamente f no tiene puntos fijos en I_2.
- Haciendo $x = y$ en (a) obtenemos $f(x+f(x)+xf(x)) = x+f(x)+xf(x)$, de donde $x+f(x)+xf(x)$ es punto fijo de f para todo $x \in S$, lo que implica que $x + f(x) + xf(x) = 0$ para todo $x \in S$. De esta forma encontramos la solución $f(x) = -\frac{x}{x+1}$ que se comprueba fácilmente que satisface ambas condiciones.

□

Problem 4 (IMO 1992/P2)**.** *Encuentra todas las funciones* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$f\left(x^2 + f(y)\right) = y + (f(x))^2$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

Solution.
- $x = 0$ implica que $f(f(y)) = y + f(0)^2$ de donde f es biyectiva.
- Existe un único α tal que $f(\alpha) = 0$

$$\begin{aligned} P(\alpha, \alpha) &\implies f(\alpha^2) = \alpha \\ P(0, \alpha^2) &\implies 0 = f(\alpha) = f(f(\alpha^2)) = \alpha^2 + f(0)^2 \end{aligned}$$

  de donde $f(0) = 0$ que implica que $f(f(x)) = x$.
- $P(x, f(y))$ implica

$$\begin{aligned} &f(x^2 + f(f(y))) = f(y) + f(x)^2 \\ &\implies f(x^2 + y) = f(y) + f(x)^2 > f(y). \end{aligned}$$

  de donde f es estrictamente creciente.
- $P(x, 0)$ implica que $f(x^2) = f(x)^2$. Haciendo $f(y) = -x^2$,

$$0 = f^{-1}(-x^2) + f(x^2) = f(-x^2) + f(x^2).$$

  Tenemos que $f(x^2 + y) = y + f(x^2)$, de donde $f(-x^2 - y) = -y + f(-x^2) \implies f(-x^2 + y) = y + f(-x^2)$ de donde f es aditiva.

□

Aditiva + creciente implica $f(x) = cx$, fácilmente obtenemos que $c = 1$, por tanto la única solución es $f(x) = x$.

Problem 5 (IMO 1999/P6)**.** *Encuentra todas las funciones* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tales que*

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

Solution. Sea $A = \{f(x)|x \in \mathbb{R}\}$ y sea $f(0) = c$.

- Haciendo $x = y = 0$ obtenemos $f(-c) = f(c) + c + 1$, de donde $c \neq 0$.
- Haciendo $x = f(y)$ obtenemos $c = f(x) + x^2 + f(x) - 1$ que implica que $f(x) = \frac{c+1}{2} - \frac{x^2}{2}$ para todo $x \in A$.
- Sea $B = \{f(a) - f(b)|a, b \in \mathbb{R}\} = \{x_1 - x_2|x_1, x_2 \in A\}$. **Claim:** $B = \mathbb{R}$. Haciendo $y = 0$ obtenemos

  $$f(x - c) - f(x) = f(c) + cx - 1$$

  que claramente barre los reales. De donde cada x puede expresarse como $x_1 - x_2$ con $x_1, x_2 \in A$.
- Sea $x = x_1 - x_2$ con $x_1, x_2 \in A$. Haciendo $x = x_1$ e $f(y) = x_2$ obtenemos

  $$\begin{aligned} f(x) &= f(x_2) + x_1x_2 + f(x_1) - 1 \\ &= \frac{c+1}{2} - \frac{x_2^2}{2} + x_1x_2 + \frac{c+1}{2} - \frac{x_1^2}{2} - 1 \\ &= c - \frac{(x_1 - x_2)^2}{2} \\ &= c - \frac{x^2}{2}. \end{aligned}$$

- lo anterior es válido para todo $x \in \mathbb{R}$ por tanto $c = \frac{c+1}{2}$, de donde $c = 1$ y obtenemos la solución final $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$. Finalmente se comprueba que dicha f satisface la condición del problema.

$\square$

4 Lista de Problemas

Problem 1 (Kyrgyzstan 2012). *Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que*
$$f(f(x)^2 + f(y)) = xf(x) + y$$
para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

Problem 2. *Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que*
$$xf(x) + y^2 + f(xy) = f(x + y)^2 - f(x)f(y)$$
para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

Problem 3 (USAMO 2002). *Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que*
$$f(x^2 - y^2) = xf(x) - yf(y)$$
para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

Problem 4 (IMO 2017). *Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que*
$$f(f(x)f(y)) + f(x + y) = f(xy)$$
para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

Problem 5 (IMO 2008). *Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ tales que*
$$\frac{f(w)^2 + f(x)^2}{f(y)^2 + f(z)^2} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$
para todos reales positivos w, x, y, z tales que $wx = yz$.

Problem 6 (IMO 2010). *Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que*
$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x)\lfloor f(y) \rfloor$$
para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

Problem 7 (IMO Shortlist 2016). *Encuentra todas las funciones $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ tales que*
$$xf(x^2)f(f(y)) + f(yf(x)) = f(xy)(f(f(x^2)) + f(f(y^2)))$$
para todos $x, y \in (0, \infty)$.

Problem 8 (IMO Shortlist 2003). *Encuentra todas las funciones no decrecientes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que*

- $f(0) = 0, f(1) = 1;$
- $f(a) + f(b) = f(a)f(b) + f(a + b - ab)$ *para todos los reales a, b tal que $a < 1 < b$.*

Problem 9 (IMO 1999/P6)**.** *Encuentra todas las funciones* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tales que*

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

Problem 10 (IMO 2002/P5)**.** *Encuentra todas las funciones* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tales que*

$$(f(x) + f(z))\,(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz)$$

para todos $x, y, z, t \in \mathbb{R}$.

Problem 11. *Encuentra todas las funciones* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tales que*

$$f(xf(y) + x) = xy + f(x)$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

References

[1] Functional Equations, David Arthur.

[2] Functional Equations in Mathematical Olympiads, Amir Hossein Parvardi.

[3] Evan Chen, The Otis Excerpts, a collection of 192 problems and solutions.

[4] Heather Macbeth, The Cauchy Functional Equation. https://blog.nekomath.com/wp-content/uploads/2016/03/Cauchy-Eq.pdf

[5] Dusan Djukic, Vladimir Jankovic, Ivan Matic, Nikola Petrovic, The IMO compendium, Second Edition.