Desigualdades.

Héctor Raúl Fernández Morales
10001noesprimo@gmail.com

Marzo, 2021

En este documento intentamos cubrir, aunque sin entrar en profundidad, las técnicas más comunes para resolver desigualdades. Incluimos varias desigualdades conocidas así como aplicaciones de estas.

Contents

1 Manipulaciones Algebraicas

En algunas ocasiones, bastante escasas en mi opinión, la desigualdad en cuestión es posible demostrarla usando exclusivamente manipulaciones algebraicas. Este tipo de demostraciones suelen ser especialmente hermosas, veamos algunos ejemplos.

Problem 1. *Sean a, b números reales. Entonces se cumple que*

$$(a+b)^2 \geq 4ab$$

Solution. Desarrollando obtenemos que la desigualdad es equivalente a

$$(a-b)^2 \geq 0.$$

□

Problem 2 (IMO 1999)**.** *Sea $n \geq 2$ un entero. Encuentra la menor constante C tal que para cualquier colección de reales no negativos $x_1, x_2, \dots, x_n$,*

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^4$$

Solution. Veamos que

$$\begin{aligned}
(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^4 &= \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j\Big)^2 \\
&\geq 4\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)\Big(2\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j\Big) \\
&= 8\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\
&\geq 8\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2)
\end{aligned}$$

Hemos usado que $x_1^2 + x_2^2 + \dots x_n^2 \geq x_i^2 + x_j^2$.
La constante buscada es $C = \frac{1}{8}$ y es la menor dado que escogiendo $x_1 = x_2 \neq 0$ y $x_3 = x_4 = \cdots = x_n = 0$ se obtiene la igualdad. □

Problem 3. *Sean x, y, z números reales. Entonces se cumple que*

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$$

Solution. Veamos que

$$\begin{gathered}
x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \\
\Updownarrow \\
2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2zx \\
\Updownarrow \\
x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + z^2 - 2zx + x^2 \geq 0 \\
\Updownarrow \\
(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0
\end{gathered}$$

□

Problem 4 (IMO 2005)**.** *Sean x, y, z reales positivos tales que $xyz \geq 1$. Prueba que*

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{x^2 + y^5 + z^2} + \frac{z^5 - z^2}{x^2 + y^2 + z^5} \geq 0.$$

Solution. [Iurie Boreico, Premio Especial] Veamos que

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} - \frac{x^5 - x^2}{x^3(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{(x^3 - 1)^2 x^2 (y^2 + z^2)}{x^3(x^2 + y^2 + z^2)(x^5 + y^2 + z^2)} \geq 0.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \sum \frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} &\geq \sum \frac{x^5 - x^2}{x^3(x^2 + y^2 + z^2)} \\ &= \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \sum (x^2 - \frac{1}{x}) \\ &\geq \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \sum (x^2 - yz) \geq 0 \end{aligned}$$

□

2 AM-GM, versión ponderada, Muirhead

Por mucho, la desigualdad de la **Media-Aritmética y Media Geométrica** es la más conocida y la más frecuente en las olimpiadas, no sólo en problemas de álgebra.

Inequality 1. *(AM-GM) Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son reales positivos, entoces se cumple la siguiente desigualdad*

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

Nota: No es objetivo de este documento ofrecer demostraciones rigurosas de las desigualdades conocidas, la mayoría de las pruebas usan técnicas avanzadas de cálculo y análisis funcional que escapan del interés de las olimpiadas.

Muchos de los problemas que se resuelven haciendo uso de (AM-GM) requieren de una adaptación ingeniosa de las expresiones algebraicas, veamos un ejemplo.

Problem 5. *Sean $a, b, c > 0$. Prueba que*

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c.$$

Solution. Usando $AM-GM$ tenemos que

$$\frac{a^3}{bc}+b+c \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{bc}\cdot b\cdot c}=3a,$$
$$\frac{b^3}{ca}+c+a \geq 3\sqrt[3]{\frac{b^3}{ca}\cdot c\cdot a}=3b,$$
$$\frac{c^3}{ab}+a+b \geq 3\sqrt[3]{\frac{c^3}{ab}\cdot a\cdot b}=3c$$

Sumando estas desigualdades tenemos el resultado buscado. □

2.1 AM-GM ponderada.

Supongamos que $a_1, a_2, \ldots a_n$ son reales positvos y que $m_1, m_2, \ldots m_n$ son enteros positivos, veamos que haciendo uso de (AM-GM) tenemos que

$$\frac{\underbrace{a_1+a_1+\ldots a_1}_{m_1}+\underbrace{a_2+a_2+\cdots+a_2}_{m_2}+\cdots+\underbrace{a_n+a_n,+\cdots+a_n}_{m_n}}{m_1+m_2+\cdots+m_n}$$
$$\geq \Big(\underbrace{a_1a_1\cdots a_1}_{m_1}\underbrace{a_2a_2\cdots a_2}_{m_2}\cdots\underbrace{a_na_n\cdots a_n}_{m_n}\Big)^{\frac{1}{m_1+m_2+\cdots+m_n}}$$

que podemos escribir como

$$\frac{m_1a_1+m_2a_2+\ldots m_na_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n} \geq (a_1^{m_1}a_2^{m_2}\cdots a_n^{m_n})^{\frac{1}{m_1+m_2+\cdots+m_n}}$$

Este poderoso resultado es válido también cuando $m_1, m_2, \ldots m_n$ son reales positivos.

Inequality 2. *(AM-GM Ponderada) Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $w_1, w_2, \ldots w_n$ son reales positivos, entoces se cumple la siguiente desigualdad*

$$\frac{w_1a_1+w_2a_2+\ldots w_na_n}{w_1+w_2+\cdots+w_n} \geq (a_1^{w_1}a_2^{w_2}\cdots a_n^{w_n})^{\frac{1}{w_1+w_2+\cdots+w_n}}$$

Veamos un problema relacionado

Problem 6. *Sean $a, b, c > 0$ tales que $a+b+c=1$. Prueba que*

$$a^ab^bc^c+a^bb^cc^a+a^cb^ac^b \leq 1.$$

Solution. Usando la versión ponderada de $AM-GM$ tenemos que

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} \geq (a^ab^bc^c)^{\frac{1}{a+b+c}} \Rightarrow a^2+b^2+c^2 \geq a^ab^bc^c$$
$$\frac{ab+bc+ca}{a+b+c} \geq (a^bb^cc^a)^{\frac{1}{a+b+c}} \Rightarrow ab+bc+ca \geq a^bb^cc^a$$
$$\frac{ac+ba+cb}{a+b+c} \geq (a^cb^ac^b)^{\frac{1}{a+b+c}} \Rightarrow ac+ba+cb \geq a^cb^ac^b$$

Sumando estas desigualdades tenemos que

$$a^a b^b c^c + a^b b^c c^a + a^c b^a c^b \leq a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = (a + b + c)^2 = 1.$$

$\square$

2.2 Muirhead

La n-tupla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se dice que **mayoriza** a la $n-$tupla $b_1, b_2, \ldots, b_n$ si se cumplen las desigualdades siguientes

$$\begin{gathered} a_1 \geq b_1 \\ a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2 \\ \vdots \\ a_1 + a_2 + \ldots a_n \geq b_1 + b_2 + \ldots b_n. \end{gathered}$$

Inequality 3 (Muirhead)**.** *Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ mayoriza a $b_1, b_2, \ldots b_n$, entonces para cualquier colección de reales positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se cumple que*

$$\sum_{sim} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n} \geq \sum_{sim} x_1^{b_1} x_2^{b_2} \cdots x_n^{b_n},$$

donde las sumas están tomadas sobre las permutaciones de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Problem 7. *Sean $a, b, c > 0$. Prueba que*

$$(a^2 b + b^2 c + c^2 a)(ab^2 + bc^2 + ca^2) \geq 9a^2 b^2 c^2.$$

Solution. Realizando la multiplicacion en el miembro izquierdo vemos que la desigualdad es equivalente a

$$(a^4 bc + b^4 ca + c^4 ab) + (a^3 b^3 + b^3 c^3 + c^3 a^3) \geq 6a^2 b^2 c^2 \tag{1}$$

Dicha desigualdad es verdadera ya que tanto $(4, 1, 1)$ como $(3, 3, 0)$ mayorizan a $(2, 2, 2)$ y podemos hacer uso de Muirhead.

$\square$

El lector se estará preguntando por qué se ha incluido Muirhead en esta sección. Resulta que la desigualdad de Muirhead no goza de especial popularidad cuando se incluye en una solución formal. La condición de mayorización garantiza que se puede aplicar (AM-GM) para probar el resultado. De hecho la desigualdad de este último problema sale directamente usando (AM-GM), aunque no siempre es así de sencillo. En general se recomienda Muirhead cuando no somos capaces de encontrar la correcta aplicación de (AM-GM) o para pequeños resultados parciales que complementan una solución más elaborada.

3 Cauchy-Schwarz, Holder

La desigualdad de Cauchy-Schwarz, junto con sus variantes, es una de las más usadas en el mundo de las olimpiadas. Esta potente desigualdad es una herramienta indispensable para cualquier resolutor profesional de problemas. El caso donde se atañe la igualdad la hace aún más especial. Veamos ahora las formas más comunes de su uso aunque es pertinente mencionar que existe un caso general de esta desigualdad que escapa de el alcance de este documento.

Inequality 4 (Cauchy-Schwarz)**.** *Sean* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *y* $b_1, b_2, \ldots b_n$ *números reales, entonces se cumple la siguiente desigualdad*

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2,$$

la igualdad se alcanza cuando $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$.

Veamos dos aplicaciones sencillas de esta desigualdad.

Problem 8. *Sean* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *números reales. Prueba que*

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) \geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{n}.$$

Solution. Es consecuencia directa de CS, tomando todos los b_i iguales a 1. □

Problem 9 (Nesbitt)**.** *Sean* a, b, c *números reales positivos, entonces se cumple que*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Solution. Veamos que CS implica que

$$((b+c) + (c+a) + (a+b))\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) \geq 3^2$$

de donde

$$\frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{c+a} + \frac{a+b+c}{a+b} \geq \frac{9}{2}$$

que es equivalente a

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + 3 \geq \frac{9}{2}$$

que implica el resultado deseado. □

3.1 Dos variantes de CS

Vamos a ver a continuación dos variaciones de CS, son bastante populares y se deducen fácilmente de la desigualdad original.

Inequality 5. *Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, \ldots b_n$ números reales positivos, entonces se cumple la siguiente desigualdad*

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n}) \geq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2,$$

la igualdad se alcanza cuando $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$.

Problem 10 (IMO 1995)**.** *Sean a, b, c reales positivos tales que $abc = 1$. Prueba que*

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Solution. Veamos que

$$\Big(\frac{1}{a}a^2(b{+}c){+}\frac{1}{b}b^2(c{+}a){+}\frac{1}{c}c^2(a{+}b)\Big)\Big(\frac{1}{a}\frac{1}{a^2(b+c)}{+}\frac{1}{b}\frac{1}{b^2(c+a)}{+}\frac{1}{c}\frac{1}{c^2(a+b)}\Big) \geq \Big(\frac{1}{a}{+}\frac{1}{b}{+}\frac{1}{c}\Big)^2$$

Desarrollando obtenemos que

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{2(ab+bc+ca)} = \frac{ab+bc+ca}{2} \geq \frac{3}{2}$$

en el último paso hemos usado AM-GM. □

Inequality 6 (Variante Engel, Lema de Titu)**.** *Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, \ldots b_n$ números reales positivos, entonces se cumple la siguiente desigualdad*

$$(\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n})(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \geq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2,$$

la igualdad se alcanza cuando $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$.

Problem 11 (Tournament of the Towns 1998)**.** *Sean a, b, c reales positivos. Prueba que*

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{a+b+c}{3}$$

Solution. Veamos que

$$\begin{aligned}\frac{a^4}{a(a^2+ab+b^2)} + \frac{b^4}{b(b^2+bc+c^2)} + \frac{c^4}{c(c^2+ca+a^2)} &\geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a(a^2+ab+b^2)+b(b^2+bc+c^2)+c(c^2+ca+a^2)} \\ &= \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^3+b^3+c^3+ab(a+b)+bc(a+c)+ca(c+a)} \\ &= \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)} \\ &= \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}\end{aligned}$$

A estas alturas rematar el problema es un mero trámite para el lector. □

3.2 Desigualdad de Holder

La siguiente desigualdad es una generalización de CS,

Inequality 7 (Holder)**.** *Sean* $a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots b_n; \cdots; z_1, z_2, \ldots, z_n$ *números reales positivos, y sean* $\lambda_a, \lambda_b, \ldots, \lambda_z$ *reales positivos que suman* 1*, entonces se cumple la siguiente desigualdad*

$$(a_1+\cdots+a_n)^{\lambda_a}(b_1+\cdots+b_n)^{\lambda_b}\cdots(z_1+\cdots+z_n)^{\lambda_z} \geq a_1^{\lambda_a}b_1^{\lambda_b}\cdots z_1^{\lambda_z}+\cdots+a_n^{\lambda_a}b_n^{\lambda_b}\cdots z_n^{\lambda_z}.$$

CS es el caso de dos sucesiones y los dos pesos iguales a $\frac{1}{2}$.

Problem 12 (IMO 2001)**.** *Sean* a, b, c *reales positivos. Prueba que*

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1.$$

Solution. Veamos que usando la desigualdad de Holder,

$$\Big(\sum_{ciclico}\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\Big)\Big(\sum_{ciclico}\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\Big)\Big(\sum_{ciclico}a(a^2+8bc)\Big) \geq (a+b+c)^3, \quad (2)$$

de donde solo resta probar que

$$(a+b+c)^3 \geq a^3+b^3+c^3+24abc$$

que es equivalente a

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

que es una bonita consecuencia de AM-GM. □

4 Reacomodo y Chebyshev

Esta sección está dedicada a dos desigualdades muy potentes, reacomodo y Chebyshev, la segunda es consecuencia directa de la primera pero tiene una estructura algebraica que suele ser muy útil y muy frecuente.

Inequality 8 (Reacomodo)**.** *Sean* $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ *y* $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ *números reales positivos, entonces para cualquier permutación* (c_i) *de los* (b_i) *se cumple las siguientes desigualdades*

$$a_1b_1+a_2b_2\cdots+a_nb_n \geq a_1c_1+a_2c_2\cdots+a_nc_n \geq a_1b_n+a_2b_{n-1}\cdots+a_nb_1.$$

las igualdades se obtienen cuando las sucesiones (a_i) *o* (b_i) *son iguales a* (c_i) *respectivamente.*

Este potente resultado parece ser capaz de resolver todas las desigualdades posibles, pero no es así, en los últimos años la tendencia general es usar la desigualdad de reacomodo como una herramienta para resolver pequeños pasos de una solución compleja. Resultados como $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$, o $a^3+b^3+c^3 \geq a^2b+b^2c+c^2a$ son consecuencia de esta desigualdad. Sin embargo, los comités de selección de problemas son bastante cuidadosos de no escoger problemas que sean aplicanción directa de reacomodo, algo que no pasaba hace unos años como veremos en el siguiente ejemplo.

Problem 13 (IMO 1983). *Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo. Prueba que*

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq 0.$$

Determina cuando se obtiene la igualdad.

Solution. Veamos que usando la **sustitución de Ravi**, $a=x+y$, $b=y+z$, $c=z+x$ la desigualdad se convierte en

$$(x+y)^2(y+z)(x-z)+(y+z)^2(z+x)(y-x)+(z+x)^2(x+y)(z-y)\geq 0$$

la sustitución de Ravi es aparentemente artificial y a priori no está claro que siempre sea posible encontrar x, y, z. Le recomendamos al lector pensar en un triángulo cualquiera y su circunferencia inscrita.
Luego de desarrollar y simplificar la desigualdad anterior, es pesado pero no más de 10 minutos, llegamos a que es equivalente a

$$x^3z+y^3x+z^3y\geq xyz(x+y+z)$$

que a su vez es equivalente a

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\geq x+y+z$$

ahora veamos que (x^2, y^2, z^2) y $(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z})$ tienen el orden inverso, de donde

$$x^2\cdot\frac{1}{x}+y^2\cdot\frac{1}{y}+z^2\cdot\frac{1}{z}=x+y+z$$

es la menor de las combinaciones posibles y por tanto esta última desigualdad es verdadera y la igualdad se cumple cuando el triángulo es equilátero. $\square$

La siguiente desigualdad es también muy popular en el mundo de las Olimpiadas de Matemáticas y es consecuencia directa de reacomodo, animo al lector a demostrarla.

Inequality 9 (Chebyshev). *Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n$ dos sucesiones de números reales positivos.*

(i) Si las sucesiones tienen el mismo orden, entonces se cumple que

$$\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{n}\geq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\cdot\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}.$$

(ii) Si las sucesiones tienen el orden inverso, entonces se cumple que

$$\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{n}\leq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\cdot\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}.$$

Problem 14 (Rumanía tst 1999)**.** *Sean* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *enteros positivos distintos. Prueba que*

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq \frac{2n+1}{3}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n).$$

Solution. Sin pérdida de generalidad asumamos que $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ y por tanto $a_i \geq i$ para todo i. Podemos tomar entonces $b_i = a_i - i \geq 0$ y la desigualdad se convierte en

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} ib_i + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \geq \frac{2n+1}{3}\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i + \frac{n(n+1)}{2}\Big),$$

que es equivalente a

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} ib_i \geq \frac{2n+1}{3}\sum_{i=1}^{n} b_i. \tag{3}$$

Veamos ahora que

$$a_{i+1} > a_i \Rightarrow a_{i+1} - i > a_i - i \Rightarrow a_{i+1} - i - 1 \geq a_i - i \Rightarrow b_{i+1} \geq b_i.$$

Usando la deigualdad de Chebyshev tenemos que

$$2\sum_{i=1}^{n} ib_i \geq 2\frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i\Big) = (n+1)\sum_{i=1}^{n} b_i \geq \frac{2n+1}{3}\sum_{i=1}^{n} b_i.$$

que demuestra (3) y además tenemos que la igualdad se cumple cuando todos los b_i son ceros, o sea, cuando los a_i son una permutación de $(1, 2, \ldots, n)$. $\square$

5 Desigualdad de Jensen

Para comprender bien esta sección los conceptos de **función convexa/cóncava** tienen que estar bien claros.

Definition 1 (función convexa/cóncava)**.** *Sea* $f : I \mapsto \mathbb{R}$ *una función continua. Supongamos que*

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} \geq f\Big(\frac{x+y}{2}\Big)$$

para todos $x, y \in I$*. Entonces* f *es una función convexa en el intervalo* I*. En el caso del signo contrario* f *se dice cóncava.*

El siguiente lemma es la caracterización más común para convexidad.

Lemma 1 (criterio de convexidad)**.** *Sea $f : I \mapsto \mathbb{R}$ una función continua y dos veces diferenciable en el interior de I. Entonces f es convexa si y solo si*

$$f''(x) \geq 0$$

para todo x en el interior de I. En el caso del signo contrario f sería cóncava.

Para la mayoría de los estudiantes de bachillerato los conceptos de continuidad, diferenciabilidad, interior de un intervalo serán más bien oscuros. De momento lo más prágmatico es asumir que siempre que evitemos divisiones por cero, logaritmos de números no positivos y comportamientos de este estilo estaremos trabajando con funciones "buenas" que podemos derivar. Vamos ya con la desigualdad.

Inequality 10 (Jensen ponderado)**.** *Sea $f : I \mapsto \mathbb{R}$ una función convexa. Entonces para cualesquiera $x_1, x_2, \dot{;} x_n \in I$ y cualesquiera $w_1, w_2, \ldots, w_n$ reales no negativos se cumple que*

$$w_1 f(x_1)+w_2 f(x_2)+\cdots+w_n f(x_n) \geq (w_1+w_2+\cdots+w_n) f\Big(\frac{w_1 x_1+\cdots+w_n x_n}{w_1+\cdots+w_n}\Big)$$

en caso de f ser cóncava la desigualdad se cumple con el signo inverso.

He decidido empezar con el caso más general pero la relamente llamada desigualdad de Jensen es cuando todos los pesos en la anterior son iguales y suman 1.

Inequality 11 (Jensen)**.** *Sea $f : I \mapsto \mathbb{R}$ una función convexa. Entonces para cualesquiera $x_1, x_2, \dot{;} x_n \in I$ se cumple que*

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n} \geq f\Big(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\Big)$$

en caso de f ser cóncava la desigualdad se cumple con el signo inverso.

Problem 15 (Zuming Feng)**.** *Sean x, y, z reales positivos tales que $x+y+z = xyz$. Prueba que*

$$\frac{1}{1+xy}+\frac{1}{1+yz}+\frac{1}{1+zx} \leq \frac{3}{4}$$

Solution. Veamos que

$$\frac{1}{1+xy} = \frac{z}{z+xyz} = \frac{z}{z+x+y+z} = \frac{z}{S+z}$$

donde $S = x+y+z$. Sea $f(t) = \frac{t}{S+t} = 1 - \frac{1}{S+t}$ es cóncava. Demuéstrenlo!!! Por la desigualdad de Jensen tenemos que

$$f\Big(\frac{x+y+z}{3}\Big) \geq \frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3} = \frac{\frac{1}{1+xy}+\frac{1}{1+yz}+\frac{1}{1+zx}}{3}.$$

El problema concluye notando que $f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) = f(\frac{S}{3}) = \frac{\frac{S}{3}}{S+\frac{S}{3}} = \frac{1}{4}$ □

6 Desigualdad de Schur

En esta sección hablaremos de la desigualdad de Schur. Es bastante conocida y por lo general un herramienta imprescindible para aquellos amantes de las expresiones algebraicas densas, me explico. Existe cierto consenso general de que casi todas las desigualdades pueden ser deducidas siguiendo los siguientes pasos: homogeneizando(próxima sección), desarrollando todo, pasando todos los miembros a un lado y rematando con una técnica precisa para dividir la expresión en desigualdades válidas. En general la complejidad de la última parte es es la que hace que esta estrategia no sea muy recomendable salvo que el atacante del problema sea un auténtico experto.
No obstante, la desigualdad de Schur tiene montones de aplicaciones e implicaciones que la convierten en una herramienta muy útil. Tiene varias generalizaciones así que animamos al lector a revisar las referencias de este reporte.

Inequality 12 (Schur)**.** *Sea a, b, c reales no negativos y sea $r > 0$. Entonces se cumple que*

$$a^r(a-b)(a-c) + b^r(b-c)(b-a) + c^r(c-a)(c-b) \geq 0,$$

la igualdad si obtiene si y solo si $a = b = c$ ó dos son iguales y el tercero es cero.

Corollary 12.1. *En la desiguladad de Schur desarrollando y reorganizando los términos se deducen las siguientes desigualdades:*

(i) $r = 1$.

- $x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq x^2y + x^2z + y^2z + y^2x + z^2x + z^2y.$
- $xyz \geq (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y).$
- $(x+y+z)^3 + 9xyz \geq 4(x+y+z)(xy+yz+zx).$

(ii) $r = 2$.

- $a^4 + b^4 + c^4 + abc(a+b+c) \geq a^3b + a^3c + b^3a + b^3c + c^3a + c^3b.$

Problem 16 (IMO 2000)**.** *Sean a, b, c reales positivos tales que $abc = 1$. Prueba que*

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1$$

Solution. Hagamos las sustitución $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{y}{z}$ y $c = \frac{z}{x}$ con $x, y, z > 0$. Desarrollando obtenemos que la desigualdad deseada es equivalente a

$$(x-y+z)(y-z+x)(z-x+y) \leq xyz,$$

que es válida por el corolario previo. □

7 Normalización y homogenización

Expresiones homogéneas pueden ser normalizadas, es decir, aplicar restricciones a las variables para simplificar el trabajo. Por ejemplo en la desigualdad

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 0$$

podemos asumir que $abc = 1$ o que $a + b + c = 1$. Por qué, se preguntará el curioso lector. La explicación es la siguiente, supongamos que $abc = k^3$, consideramos $a = kx$, $b = ky$ y $c = kz$ y nuestra desigualdad se convierte en

$$k^3(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) \geq 0 \Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geq 0$$

que es la misma desigualdad pero ahora $xyz = \frac{a}{k} \cdot \frac{b}{k} \cdot \frac{c}{k} = 1$. Animamos al lector a que compruebe que podemos asumir que $a + b + c = 1$.

Problem 17 (USAMO 2003)**.** *Sean a, b, c números reales no negativos. Prueba que*

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \leq 8.$$

Solution. La desigualdad es homogénea así que podemos asumir que $a+b+c = 3$. La expresión del miembro izquierdo se reduce a

$$\frac{(3+a)^2}{2a^2+(3-a)^2} + \frac{(3+b)^2}{2b^2+(3-b)^2} + \frac{(3+c)^2}{2c^2+(3-c)^2}.$$

Notemos ahora que

$$\begin{aligned} \frac{3(3+a)^2}{2a^2+(3-a)^2} &= \frac{a^3+6a+9}{a^2-2a+3} = 1 + \frac{8a+6}{(a-1)^2+2} \\ &\leq 1 + \frac{8a+6}{2} = 4a+4, \end{aligned}$$

sumando el resto de las fracciones obtenemos que

$$\frac{(3+a)^2}{2a^2+(3-a)^2} + \frac{(3+b)^2}{2b^2+(3-b)^2} + \frac{(3+c)^2}{2c^2+(3-c)^2} \leq \frac{1}{3}(4a+4b+4c+12) = 8.$$

□

Lo opuesto a normalización es homogeneización. Suele usarse cuando queremos deshacernos de cierta restricción que está causando más problemas que resolviendolos o simplemente queremos trabajar con términos equilibrados que por lo general son más inofensivos. Las típicas sustituciones para homogeneizar son del estilo $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{y}{x}$ y $c = \frac{z}{x}$ cuando $abc = 1$, o $a = \frac{x}{x+y+z}$, $b = \frac{y}{x+y+z}$ y $c = \frac{z}{x+y+z}$ cuando $a + b + c = 1$. Sin embargo hay muchas conocidas y un amplio márgen a la creatividad para simplificar desigualdades y encontrar vías de solución que podríamos denominar casi que artísticas.

Problem 18 (Tournament of Towns 1997)**.** *Sean a, b, c números reales positivos tales que $abc = 1$. Prueba que*

$$\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \leq 1.$$

Solution. Sea $a = x^3$, $b = y^3$ y $c = z^3$. Sabemos que $xyz = 1$, veamos que

$$\begin{gathered} x^3 + y^3 \geq xy(x+y) \\ \Updownarrow \\ x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 \geq 0 \\ \Updownarrow \\ (x-y)(x^2-y^2) \geq 0 \end{gathered}$$

De donde,

$$\begin{aligned} \frac{1}{a+b+1} &= \frac{1}{x^3+y^3+xyz} \\ &\leq \frac{1}{xy(x+y)+xyz} \\ &= \frac{xyz}{xy(x+y+z)} \\ &= \frac{z}{x+y+z} \end{aligned}$$

De la misma forma obtenemos

$$\frac{1}{b+c+1} \leq \frac{x}{x+y+z}$$

y

$$\frac{1}{c+a+1} \leq \frac{y}{x+y+z}.$$

Sumando las tres obtenemos el resultado deseado. □

8 Lista de desigualdades y técnicas

Esta última sección es simplemente una lista con desigualdades que no hemos tratado en este reporte. Muchas tienen complejas generalizaciones, versiones usando integrales, otras muchas quedarán fuera por olvido o desconocimiento pero ya iremos actualizando esta lista dinámicamente.

Inequality 13 (Minkowski)**.** *Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y $y_1, y_2, \ldots, y_n$ números reales positivos y sea $p > 1$. Entonces se cumple que*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Inequality 14 (Bernoulli). *Sea $r \geq 1$ y $x \geq -1$. Entonces se cumple que*

$$(1+x)^r \geq 1 + rx$$

Inequality 15 (Fórmula de sumación de Abel). *Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y $y_1, y_2, \ldots, y_n$ números reales o complejos y sea*

$$S_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Entonces se cumple que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n-1} S_i (b_i - b_{i+1}) + S_n b_n.$$

Inequality 16 (media aritmética, media geométrica y media harmónica). *Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reales positivos, entonces se cumple que*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \geq \Big(\prod_{i=1}^{n} x_i\Big)^{\frac{1}{n}} \geq \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

Inequality 17 (Huygens). *Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ números reales positivos tales que $p_1 + p_2 + \ldots p_n = 1$, entoces se cumple que*

$$\prod_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^{p_i} \geq \prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i} \prod_{i=1}^{n} y_i^{p_i}$$

Inequality 18 (Suranyi). *Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reales no negativos, entoces se cumple que*

$$(n-1) \sum_{i=1}^{n} x_i^n + n \prod_{i=1}^{n} x_i \geq \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^{n-1}\Big)$$

Inequality 19 (Turkevici). *Sean x, y, z, t reales positivos, entoces se cumple que*

$$x^4 + y^4 + z^4 + t^4 + 2xyzt \geq x^2y^2 + y^2z^2 + z^2t^2 + t^2x^2 + x^2z^2 + y^2t^2.$$

Inequality 20 (Karamata). *Sea $f : I \mapsto \mathbb{R}$ una función convexa. Supongamos que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ mayoriza a $b_1, b_2, \ldots b_n$, donde $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots b_n \in I$. Entonces se cumple que*

$$f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_n) \geq f(b_1) + f(b_2) + \cdots + f(b_n)$$

entonces para cualquier colección de reales positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se cumple que

9 Lista de Problemas

Problem 1. *Sean a, b, c reales positivos tales que $abc = 1$. Prueba que*

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c.$$

Problem 2. *Sean a, b, c, d reales positivos tales que $a + b + c + d = 4$. Prueba que*

$$\frac{4}{abcd} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}.$$

Problem 3. *Sean a, b, c, d reales positivos tales que $abc = 1$. Prueba que*

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq a + b + c$$

Problem 4. *Sean a, b, c reales positivos. Prueba que*

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \geq \frac{3}{1+abc}$$

Problem 5 (Polonia 1995)**.** *Sea n un entero positivo. Calcula el mínimo valor posible de*

$$x_1 + \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_3^3}{3} + \cdots + \frac{x_n^n}{n},$$

donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son reales postivos tales que

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots, \frac{1}{x_n} = n.$$

Problem 6 (USAMO 2001)**.** *Sean a, b, c reales no negativos tales que $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Prueba que*

$$0 \leq ab + bc + ca \leq 2.$$

Problem 7. *Sea $p \geq 2$ un número real. Prueba que si a, b, c son reales no negativos.*

$$\sqrt[3]{\frac{a^3 + pabc}{1+p}} + \sqrt[3]{\frac{b^3 + pabc}{1+p}} + \sqrt[3]{\frac{b^3 + pabc}{1+p}} \leq a + b + c$$

Problem 8 (Rusia 2004)**.** *Prueba que si $n \geq 3$ y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son reales postivos tales que su producto es 1, entonces*

$$\frac{1}{1 + x_1 + x_1x_2} + \frac{1}{1 + x_2 + x_2x_3} + \ldots, \frac{1}{1 + x_n + x_nx_1} > 1.$$

Problem 9 (APMO 1998)**.** *Sean x, y, z reales positivos. Prueba que*

$$\left(1 + \frac{x}{y}\right) + \left(1 + \frac{y}{z}\right) + \left(1 + \frac{z}{x}\right) \geq 2 + \frac{2(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}.$$

Problem 10 (USAMO 2002)**.** *Sean x, y, z reales positivos. Prueba que*

$$(a^5 - a^2 + 3)(b^5 - b^2 + 3)(c^5 - c^2 + 3) \geq (a + b + c)^3$$

Problem 11 (IMO 1996 Shortlist)**.** *Sean a, b, c números reales positivos tales que $abc = 1$. Prueba que*

$$\frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} + \frac{bc}{b^5 + c^5 + bc} + \frac{ca}{c^5 + a^5 + ca} \leq 1.$$

Problem 12 (IMO 1975)**.** *Sean $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ y $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ números reales y sea $(c_1, c_2 \ldots, c_n)$ una permutacion de $(b_1, b_2 \ldots, b_n)$. Prueba que*

$$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2 \leq (a_1 - c_1)^2 + (a_2 - c_2)^2 + \cdots + (a_n - c_n)^2.$$

Problem 13 (IMO 1978)**.** *Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ enteros positivos distintos. Prueba que*

$$\frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{n^2} \geq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Problem 14 (IMO 1964)**.** *Sean a, b, c lados de un triángulo. Prueba que*

$$a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) \leq 3abc.$$

Problem 15. *Sean $a, b, c > 0$. Prueba que*

$$\frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3 b^3 c^3} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Problem 16. *Sean $a, b, c, d > 0$ tales que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Prueba que*

$$\frac{a^2}{b + c + d} + \frac{b^2}{c + d + a} + \frac{c^2}{d + a + b} + \frac{d^2}{a + b + c} \geq \frac{4}{3}.$$

Problem 17. *Sean $a, b, c, d > 0$ tales que $a + b + c + d = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$. Prueba que*

$$2(a + b + c + d) \geq \sqrt{a^2 + 3} + \sqrt{b^2 + 3} + \sqrt{c^2 + 3} + \sqrt{d^2 + 3}$$

Problem 18. *Sean $a, b, c > 0$. Prueba que*

$$\sqrt{\frac{a}{4a + 4b + c}} + \sqrt{\frac{b}{4b + 4c + a}} + \sqrt{\frac{c}{4c + 4a + b}} \leq 1.$$

Problem 19 (Vietnam 1998)**.** *Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reales positivos tales que*

$$\frac{1}{x_1 + 1998} + \frac{1}{x_2 + 1998} + \cdots + \frac{1}{x_n + 1998} = \frac{1}{1998}.$$

Prueba que

$$\frac{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}}{n - 1} \geq 1998.$$

Problem 20 (Polonia 2005)**.** *Sean* $a, b, c > 0$ *tales que* $ab+bc+ca = 3$*. Prueba que*

$$a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \geq 9.$$

Problem 21 (Reino Unido 1999)**.** *Sean* $a, b, c > 0$ *tales que* $a + b + c = 1$*. Prueba que*

$$7(ab + bc + ca) \leq 2 + 9abc.$$

Problem 22 (Macedonia 1999)**.** *Sean* $a, b, c > 0$ *tales que* $a^2 + b^2 + c^2 = 1$*. Prueba que*

$$a + b + c + \frac{1}{abc} \geq 4\sqrt{3}.$$

References

[1] 101 Problems in ALgebra From the training of the USA IMO Team.

[2] Basics of Olympiad Inequalities, Samin Riasat.

[3] Evan Chen, The Otis Excerpts, a collection of 192 problems and solutions.

[4] Olympiads Inequalities, Thomas Mildorf.

[5] Problems from the book, Titu Andrescu-Gabriel Dospinescu.

[6] https://www.imomath.com/index.php?options=597&lmm=0

[7] https://www.esuppa.it/Articoli/Suppa_Inequalities%20from%20the%20word%201995-2005.pdf