# Cuando contar una vez no es suficiente.

Héctor Raúl Fernández Morales
hectorraulfm@gmail.com

Noviembre 26, 2020

En este documento resolveremos varios problemas de olimpiadas de matemáticas usando una técnica combinatoria conocida como **Conteo Doble**. Lo interesante de esta técnica es que calculamos cardinalidades de conjuntos, o sea contamos, para conseguir un objetivo que no está relacionado directamente con contar!!! Básicamente tendremos un conjunto $A$ que dependerá del problema y de la información que tenemos y calcularemos dos expresiones o cotas para $|A|$. Esto nos permite convertir información combinatioria en expresiones algebraicas relevantes para el problema.

## 1 Matriz de incidencia

### 1.1 Contando 1's.

Comencemos con dos ejemplos sencillos.

**Problem 1.** *Sean $A_1, A_2, \ldots, A_6$ subconjuntos de $S = \{1, 2, \ldots, 8\}$. Supongamos que cada $A_i$ tiene 4 elementos y cada elemento de $S$ pertenece exactamente a $m$ de los $A_i$. Encuentra $m$.*

*Sol:* Dibujemos una matriz de incidencia con 6 filas, una para cada subconjunto, y 8 columnas una para cada elemento de $S$. En dicha matriz la entrada $a_{i,j} = 1$ si el elemento $j$ pertenece al subconjunto $i$ y $a_{i,j} = 0$ en otro caso.

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \ldots & 8 \end{array} \\
\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_6 \end{array} & \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,8} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,8} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{6,1} & a_{6,2} & \cdots & a_{6,8} \end{bmatrix}
\end{array}$$

Sean $x_i = \sum_{j=1}^{8} a_{i,j}$ y $y_j = \sum_{i=1}^{6} a_{i,j}$ las sumas por filas y por columnas. De las condiciones del problema sabemos que $x_i = 4$ para todo $i = 1, 2, \ldots, 6$ y $y_j = m$ para todo $j = 1, 2, \ldots, 8$. Sabemos que la suma total es la misma, por tanto

$$24 = 4 \cdot 6 \sum_{i=1}^{6} x_i = \sum_{j=1}^{8} y_j = 8 \cdot m,$$

de donde $3m = 24$ y $m = 3$. $\square$

**Problem 2.** *En cierto comité, cada miembro pertenece a 3 subcomités y cada subcomité tiene 3 miembros. Prueba que el número de miembros es igual al número de subcomités.*

*Sol:* Dibujemos una matriz de incidencia con $n$ filas, una para cada miembro, y $m$ columnas una para cada subcomité . En dicha matriz la entrada $a_{i,j} = 1$ si el miembro $i$ pertenece al subcomité $j$ y $a_{i,j} = 0$ en otro caso.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} comite_1 & comite_2 & \ldots & comite_m \end{array} \\ \begin{array}{c} miembro_1 \\ miembro_2 \\ \vdots \\ miembro_n \end{array} & \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix} \end{array}$$

Sean $x_i = \sum_{j=1}^{m} a_{i,j}$ y $y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}$ las sumas por filas y por columnas. De las condiciones del problema sabemos que $x_i = 3$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$ y $y_j = 3$ para todo $j = 1, 2, \ldots, m$. Sabemos que la suma total es la misma, por tanto

$$3n = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{m} y_j = 3m,$$

de donde $n = m$. □

## 1.2 Contando ternas.

Lo que hemos hecho en los dos ejemplos previos es contar pares de la forma (*elemento*, *conjunto*) donde el cojunto contiene el elemento. Esta tiene variaciones importantes como por ejemplo contar ternas

$$(elemento,\ conjunto,\ conjunto),$$

donde el elemento pertenece a la intersección de los conjuntos o ternas

$$(elemento,\ elemento,\ conjunto),$$

donde ambos elementos pertencen al conjunto.

**Problem 3.** *(IMC 2002) En cierta olimpiada participan* 200 *concursantes. Hay* 6 *problemas por resolver. Se sabe que cada problema fue resuelto por* 120 *concursantes como mínimo. Prueba que existe una pareja de concursantes tal que entre ambos lograron resolver los* 6 *problemas.*

*Sol:* Dibujemos una matriz de incidencia con $\binom{200}{2}$ filas, una para cada pareja de concursantes, y 6 columnas una para cada problema . En dicha matriz la entrada $a_{(i,j),k} = 1$ si al menos uno de los concursantes $i, j$ consiguió resolver el problema $k$, $a_{(i,j),k} = 0$ en otro caso.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} problema_1 & problema_2 & \ldots & problema_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} c_1c_2 \\ c_1c_3 \\ \vdots \\ c_{199}c_{200} \end{array} & \begin{bmatrix} a_{(1,2),1} & a_{(1,2),2} & \cdots & a_{(1,2),6} \\ a_{(1,3),1} & a_{(1,3),2} & \cdots & a_{(1,3),6} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{(199,200),1} & a_{(199,200),2} & \cdots & a_{(199,200),6} \end{bmatrix} \end{array}$$

Sea

$$x_{i,j} = \sum_{k=1}^{6} a_{(i,j),k},$$

donde $1 \leq i < j \leq 200$, la suma por filas y sea

$$y_k = \sum_{1 \leq i < j \leq 200} a_{(i,j),k},$$

donde $1 \leq k \leq 6$, las suma por columnas.
Denotemos por $N$ la suma total de la matriz y asumamos que ninguna pareja de concursantes consiguió resolver los 6 problemas lo que es equivalente a $x_{i,j} \leq 5$ para todos $1 \leq i < j \leq 200$. De donde

$$N = \sum_{1 \leq i < j \leq 200} x_{i,j} \leq 5\binom{200}{2} \tag{1}$$

Por otra parte cada problema fue resulto por al menos 120 concursantes, lo que implica que como mucho 80 concursantes no resolvieron dicho problema. Esto se traduce en que a lo sumo $\binom{80}{2}$ parejas tienen un 0 en la entrada de la matriz respectiva a ese problema, de donde $y_k \geq \binom{200}{2} - \binom{80}{2}$, entonces

$$N = \sum_{k=1}^{6} y_k \geq 6\left(\binom{200}{2} - \binom{80}{2}\right) \tag{2}$$

Combinando (1) y (2),

$$5\binom{200}{2} \geq N \geq 6\left(\binom{200}{2} - \binom{80}{2}\right) \Rightarrow 6\binom{80}{2} \geq \binom{200}{2} \Rightarrow 18960 \geq 19900,$$

que es absurdo por tanto nuestra afirmación es falsa y concluimos que al menos una pareja de concursantes consiguió resolver todos los problemas. $\square$

**Problem 4.** *(USA TST 2005) Sea $n$ un entero mayor o igual que 2. Dado un entero positivo $m$, sea $C_m = \{1, 2, \ldots, mn\}$. Supongamos que existe un conjunto de $2n$ elementos $T$ tal que:*

- *(a) cada elemento de $T$ es un subconjunto de $C_m$ con cardinal $m$,*
- *(b) cada par de elementos de $T$ comparten a lo sumo 1 elemento de $C_m$ y*
- *(c) cada elemento de $C_m$ está contenido en exactamente 2 de los elementos de $T$.*

*Determina el máximo valor de $m$ en función de $n$.*

*Sol:* Sea $T = \{S_1, S_2 \ldots, S_{2n}\}$ los subconjuntos de $C_m$ que conforman $T$. Dibujemos una matriz de incidencia con $\binom{2n}{2}$ filas, una para cada pareja de elementos de $T$, y $mn$ columnas una para cada elemento de $C_m$. En dicha matriz la entrada $a_{(i,j),k} = 1$ si el elemento $k$ pertenece a los subconjuntos $S_i$ y $S_j$, $a_{(i,j),k} = 0$ en otro caso.

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \ldots & mn \end{array} \\
\begin{array}{c} S_1S_2 \\ S_1S_3 \\ \vdots \\ S_{2n-1}c_{2n} \end{array} &
\begin{bmatrix}
a_{(1,2),1} & a_{(1,2),2} & \cdots & a_{(1,2),mn} \\
a_{(1,3),1} & a_{(1,3),2} & \cdots & a_{(1,3),mn} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
a_{(2n-1,2n),1} & a_{(2n-1,2n),2} & \cdots & a_{(2n-1,2n),mn}
\end{bmatrix}
\end{array}$$

Sea

$$x_{i,j} = \sum_{k=1}^{mn} a_{(i,j),k},$$

donde $1 \leq i < j \leq 2n$, la suma por filas y sea

$$y_k = \sum_{1 \leq i < j \leq 2n} a_{(i,j),k},$$

donde $1 \leq k \leq mn$, las suma por columnas.
Denotemos por $N$ la suma total de la matriz, $(b)$ implica que $x_{i,j} \leq 1$, de donde

$$N = \sum_{1 \leq i < j \leq 2n} x_{i,j} \leq \binom{2n}{2} \tag{3}$$

Por otra parte $(c)$ implica $y_k = 1$, entonces

$$N = \sum_{k=1}^{mn} y_k = mn \tag{4}$$

Combinando (3) y (4),

$$\binom{2n}{2} \geq N = mn \Rightarrow 2n - 1 \geq m,$$

Ya tenemos una cota superior para $m$ para concluir que es el máximo tenemos que encontrar una configuración que cumpla las condiciones del problema con $m = 2n-1$. El ejemplo es espectacular!!!, consideremos $2n$ rectas en el plano en posición general, esto es, no hay 3 colineales y no hay 2 paralelas. Cada recta es intersectada por exactamente $2n - 1$ rectas, consideremos $C_m$ como el conjunto de los $\binom{2n}{2} = mn$ puntos de intersección de dichas rectas y sea $S_l$ el cojunto de estos puntos que pertenece a la $l$-ésima recta, $1 \leq l \leq 2n$. Es fácil ver que se satisface $(a)$, en efecto, $S_l \subset C_m$ y $|S_l| = 2n - 1 = m$ para todo $1 \leq l \leq 2n$. La intersección de cualesquiera de estos subconjuntos es exactamente un punto, por tanto se satisface $(b)$. Por último cada punto está en exactamente dos rectas por tanto se satisface $(c)$. $\square$

## 1.3 Desigualdad de Jensen

Como hemos visto usualmente contamos pares de 1's, por tanto la función $f(n) = \binom{n}{2}$ suele aparecer con frecuencia. La extensión de esta función a los reales $f(x) = \frac{1}{2}x(x-1)$ es convexa. Usando la *desigualdad de Jensen* obtenemos

$$\begin{aligned} f(a_1) + f(a_2) + \dots f(a_n) &\geq nf\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots a_n}{n}\right) \\ \binom{a_1}{2} + \binom{a_2}{2} \dots \binom{a_n}{2} &\geq n\frac{\frac{a_1+a_2+\dots a_n}{n}\left(\frac{a_1+a_2+\dots a_n}{n} - 1\right)}{2} \\ \binom{a_1}{2} + \binom{a_2}{2} \dots \binom{a_n}{2} &\geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots a_n)(a_1 + a_2 + \dots a_n - n)}{2n} \end{aligned} \tag{5}$$

No obstante esta cota no siempre es la mejor posible ya que la igualdad se alcanza cuando $a_i = \frac{a_1+a_2+\dots a_n}{n}$ para todo $i$, lo cual puede no ser posible debido a que los $a_i$ tienen que ser enteros. Usando este último hecho, podemos ajustar la desigualdad usando la *Desigualdad de Karamata* o simplemente discretizando

$$\binom{a_1}{2} + \binom{a_2}{2} \dots \binom{a_n}{2} \geq r\binom{k+1}{2} + (n-r)\binom{k}{2} \tag{6}$$

donde $a_1 + a_2 + \dots a_n = nk + r$ con $k, r$ enteros tales que $0 \leq r \leq n$.

**Problem 5.** *(IMO 1998) En una competición hay $a$ concursantes y $b$ jueces con $b \geq 3$ impar. Cada juez califica a cada concursante como "aprobado" o "suspenso". Supngamos que $k$ es tal que para cualesquiera 2 jueces, sus calificaciones coinciden a los sumo en $k$ concursantes. Prueba que $\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$.*

*Sol:* Dibujemos una matriz de incidencia con $\binom{b}{2}$ filas, una para cada pareja de jueces y $a$ columnas una para cada concursante. En dicha matriz la entrada $a_{(i,j),k} = 1$ si los jueces $i, j$ le dieron la misma calificación al concursante $k$, $a_{(i,j),k} = 0$ en otro caso.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} c_1 & c_2 & \dots & c_a \end{array} \\ \begin{array}{c} j_1 j_2 \\ j_1 j_3 \\ \vdots \\ j_{b-1} j_b \end{array} & \begin{bmatrix} a_{(1,2),1} & a_{(1,2),2} & \cdots & a_{(1,2),a} \\ a_{(1,3),1} & a_{(1,3),2} & \cdots & a_{(1,3),a} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{(b-1,b),1} & a_{(b-1,b),2} & \cdots & a_{(b-1,b),a} \end{bmatrix} \end{array}$$

Sea

$$x_{i,j} = \sum_{k=1}^{a} a_{(i,j),k},$$

donde $1 \leq i < j \leq b$, la suma por filas y sea

$$y_k = \sum_{1 \leq i < j \leq b} a_{(i,j),k},$$

donde $1 \leq k \leq a$, las suma por columnas.
Denotemos por $N$ la suma total de la matriz. Sabemos que dos jueces cualesquiera coinciden en a lo sumo $k$ concursantes, de donde $x_{i,j} \leq k$ y,

$$N = \sum_{1 \leq i < j \leq b} x_{i,j} \leq k \binom{b}{2}. \tag{7}$$

Para cada $1 \leq k \leq a$ sea $t_k$ la cantidad de jueces que "aprobaron" al concursante $c_k$, esto implica que $(b - t_k)$ jueces lo suspendieron, de donde la cantidad de parejas de jueces que coincidieron en la calificación del concursante $c_k$ es $\binom{t_k}{2} + \binom{b-t_k}{2}$ y combinando (6) con el hecho de ser $b$ impar obtenemos que,

$$\binom{t_k}{2} + \binom{b - t_k}{2} \geq \binom{\frac{b+1}{2}}{2} + \binom{\frac{b-1}{2}}{2}$$

sumando ahora por filas y usando este último resultado

$$N = \sum_{k=1}^{a} y_k = \sum_{k=1}^{a} \binom{t_k}{2} + \binom{b - t_k}{2} \geq \sum_{k=1}^{a} \binom{\frac{b+1}{2}}{2} + \binom{\frac{b-1}{2}}{2} = a\frac{(b-1)^2}{4}. \tag{8}$$

combinando (7) y (7), obtenemos el resultado deseado. $\square$

### 1.4 Conexión con grafos

Existe una conexión natural, bastante intuitiva, entre la matriz de incidencia y los grafos. Un grafo no es más que un par de conjuntos $G = (V, E)$ donde $V$ está formado por elementos que llamamos vértices y $E$ es un conjunto de aristas que son de pares $(v_i, v_j)$ con $v_i, v_j \in V$. La cantidad de aristas que inciden en el vértice $v$ se denota por $d(v)$ y la cantidad total de aristas del grafo no es más que $|E|$. Todo grafo es representado por una matriz de incidencia de la siguiente forma

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} \end{array}$$

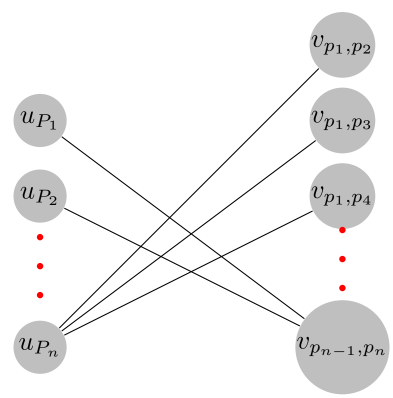
donde $a_{i,j} = 1$ si existe una arista conectando los vértices $v_i$ y $v_j$ y $a_{i,j} = 0$ en otro caso.
Esta relación permite atacar problemas de conteo doble desde el punto de vista de grafos, sean problemas estrictamente de grafos o problemas que tienen una interpretación a través de los grafos, como el siguiente ejemplo que es especialemte bonito.

**Problem 6.** *(IMO 1989) Sean $n, k$ enteros positivos y sea $S$ un conjunto de $n$ puntos del plano tales que* *(i) $S$ no contiene 3 puntos colineales*

*(ii) para cada punto $P \in S$ existen al menos $k$ puntos de $S$ que equidistan de $P$.*

*Prueba que $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.*

*Sol:* Consideremos el siguiente grafo bipartito $G = (U, V)$,




donde cada vértice en $U$ representa un punto y cada vértice en $V$ representa una pareja de puntos y existe una arista conectando $u_{P_l}$ con $v_{p_i,p_j}$ si el punto $P_l$ equidista de $P_i$ y $P_j$, o lo que es equivalente $P_l$ pertence a la mediatriz de $\overline{P_iP_j}$.
Sabemos que para cada punto $P_l$ existen al menos $k$ puntos que equidistan de él, por tanto $P_l$ pertence como mínimo a la mediatriz de $\binom{k}{2}$ segmentos, lo que implica que $d(u_{P_l}) \geq \binom{k}{2}$, sumando los grados de los vertices en $U$ obtenemos $|E|$, de donde

$$|E| = \sum_{l=1}^{n} d(u_{P_l}) \geq n\binom{k}{2}. \tag{9}$$

Por otra parte, para cada pareja de puntos $P_i, P_j$ en la mediatriz de $\overline{P_iP_j}$ puede haber a lo sumo 2 puntos de lo contrario habrían 3 puntos colineales, de donde $d(v_{p_i,p_j}) \leq 2$ para todo $1 \leq i < j \leq n$, lo que implica que

$$|E| = \sum_{1 \leq i < j \leq n} d(v_{p_i,p_j}) \leq 2\binom{n}{2}. \tag{10}$$

Combinando (9) y (10) obtenemos que

$$\begin{aligned} n\binom{k}{2} &\leq 2\binom{n}{2} \\ k(k-1) &\leq 2(n-1) \\ k^2 - k + 2 &\leq 2n \end{aligned}$$

de donde $k^2 - k + \frac{1}{4} < 2n$ y finalmente $k - \frac{1}{2} < \sqrt{2n}$. $\square$

Se deja al lector elaborar una solución usando la matriz de incidencia.

## 2 Lista de Problemas

**Problem 1.** *(Rusia 1996) En cierta ciudad hay* 1600 *delegados que han formando* 16000 *comités de* 80 *personas cada uno. Probar que podemos encontrar* 2 *comités con al menos* 4 *miembros en común.*

**Problem 2.** *(China 1993) Un grupo de* 10 *personas asiste a una librería a comprar libros. Se sabe que:*

1. *Cada uno compró* 3 *libros*
2. *Para cualesquiera* 2 *personas, existe al menos un libro que compraron ambos.*

*Cuál es el menor número de personas que podría haber comprado el libro que más personas compraron.*

**Problem 3.** *(IMO 2004 shorlist) En cierta universidad hay* 10001 *estudiantes. Algunos estudiantes se unen para formar clubs(un estudiante puede formar parte de varios clubs). Algunos clubs se unen para formar sociedades (un club puede pertenecer a varias sociedades). Hay un total de $k$ sociedades. Supongamos que se cumplen las condiciones siguientes:*

1. *Cada par de estudiantes pertenece a exactamente un club.*
2. *Para cada estudiante y cada sociedad, el estudiante pertenece a exactamente un club de dicha sociedad.*
3. *Cada club tiene un número impar de estudiantes. Además, un club con $2m + 1$ estudiantes pertenece a exactamente $m$ sociedades.*

*Encuentra todos los valores posibles de $k$.*

**Problem 4.** *(Hong Kong 2007) En una escuela hay* 2007 *niños y* 2007 *niñas. Cada estudiante pertenece a no más de* 100 *clubs de la escuela. Se sabe que cada pareja de niño y niña tiene por lo menos un lcub en común. Prueba que existe un club con al menos* 11 *niños y al menos* 11 *niñas.*

**Problem 5.** *(Iran 1999) Sean $C_1, C_2, \ldots C_n \quad (n \geq 2)$ circunferencias de radio* 1 *en el plano donde no hay* 2 *de ellas tangentes y donde el conjunto formado por la unión de estas circunferencias es conexo. Sea $S$ el conjunto de los puntos que pertenecen a al menos dos de estas circunferencias. Prueba que $|S| \geq n$.*

**Problem 6.** *(Canadá 2006) En un arreglo rectangular de reales no negativos con $m$ filas y $n$ columnas cada fila y cada columna contiene al menos un elemento positivo. Además, si una fila y una columna se intersectan en un elemnto positivo, entonces la suma de sus elementos es la misma. Prueba que $m = n$.*

**Problem 7.** *(France) En un encuentro internacional con $n \geq 3$ participantes se hablan* 14 *idiomas. Sabemos que cualesquiera* 3 *participantes hablan un lenguaje común y que ningún lenguaje es hablado por más de la mitad de los participantes. Cuál es el menor valor posible de $n$.*

**Problem 8.** *(China TST 1992) En una competencia de matemáticas participan* 16 *estudiantes. Cada problema es de opción múltiple con* 4 *opciones. Luego de certamen se conoce que cualesquiera* 2 *estudiantes tienen a lo sumo una respuesta en común. Determina el máximo número de preguntas.*

**Problem 9.** *(Iran 2010) Sea $S$ un conjunto de $n$ puntos del plano donde no hay* 3 *colineales. Prueba que el número de triangulos de área* 1 *cuyos vértices pertenecen a $S$ es menor o igual que $\frac{2}{3}(n^2 - n)$.*

**Problem 10.** *(Ibero 2001) Sea $X$ un cojunto con $n$ elementos. Dado $k > 2$ subconjuntos de $X$, cada uno con al menos $r$ elementos, prueba que siempre podemos encontrar* 2 *cuya intersección tiene al menos $r - \frac{nk}{4(k-1)}$ elementos.*

**Problem 11.** *(IMO 2001) En una competencia de matemáticas toman parte* 21 *niños y* 21 *niñas. Se sabe que:*

1. *Cada concursante resolvió a lo sumo* 6 *problemas.*

2. *Para cada par formado por un niño y una niña existe al menos un problema que fue resuelto por ambos.*

*Prueba que existe un problema que fue resuelto por al menos* 3 *niños y al menos* 3 *niñas.*

**Problem 12.** *(IMO 2005) En una competencia de matemáticas hay* 6 *problemas propuestos. Cada par de problemas fue resuelto por más de* 2/5 *de los estudiantes. Nadie resolvió los* 6 *problemas. Prueba que hay al menos* 2 *estudiantes que resolvieron* 5 *problemas cada uno.*

# References

[1] Pranav Sriram, Olympiad Combinatorics,`https://artofproblemsolving.com/community/c6h601134`

[2] Yufei Zhao, Counting in two ways, `https://yufeizhao.com/olympiad/doublecounting_mop.pdf`

[3] `https://artofproblemsolving.com`